

جرّ اثقال

کتاب دوم

علم تعادل قوی

مطابق آخرین پروگرام مصوبهٔ شورای عالی معارف

مخصوص سال ششم متوسطه

تألیف

(حسین هورفر - معلم ریاضی در مدارس متوسطه تهران)

از نشریات کتابخانه مرکزی - تهران

خیابان شاهپور — تلفن ۱۳۹۹

۱۳۱۱

مطبعهٔ «بروخیم» تهران

جر اثقال

کتاب دوم

علم تعادل قوی

مطابق آخرین پرگرام مصوبهٔ شورای عالی معارف
مخصوص سال ششم متوسطه

تألیف

حسین هورفر - معلم ریاضی در مدارس متوسطه تهران

۱۳۱۰

مطبعهٔ «بروخیم» تهران



کتاب دوم

علم تعادل قوی

فصل اول - اصول موضوعه جر اثقال

۱ - معرفة القوی - علم تعادل قوی - موضوع معرفة الحرکات بحث در حرکات و اشکال مختلفه آنها بود بدون آنکه نظری باسباب ایجاد شان داشته باشیم ، تجسس مسبب‌های مزبور موضوع **معرفةالقوی** Dynamique میباشد و آن در مورد ساختمان ماشینها استعمال میشود . بعبارة اخری موضوع معرفة القوی بحث در دو مسئله ذیل است :

۱ - جسمی تحت طریقهٔ معلومی متحرك است ، تعیین اعمالی که مورث ایجاد حرکت مزبور اند مطلوب است .

۲ - جسمی با شرایط اولیه مشخصی تحت تأثیر اعمال معینی مفروض است مقصود بدست آوردن حرکتی است که از اثر اعمال مزبور احداث میگردد .

بخصوص میتوان معین نمود چه روابطی باید بین آثار وارده بر اجسام بر قرار باشد تا نسبت بدستگاه مفروضی بحالت سکون قرار گیرند بعبارة اخری بحال تعادل باقی بمانند .

وقتی دستگاه ثابت زمین اختیار شود ، تحقیق مزبور موضوع علم **تعادل قوی** Statique است ، چنانچه سکون‌را نسبت بدستگاهی یکنوع حرکت فرض نمائیم تعادل قوی خود نیز مبحثی از معرفة القوی میگردد .

اهمیت عملی علم تعادل قوی باعث آن است که از مبحث معرفة القوی جدا باشد ، بخصوص علم تعادل قوی در موقع خیلی مهمی مورد استعمال پیدا میکند و بوسیلهٔ آن میتوان آثاری که مواد معینی در یك ساختمان بر یکدیگر وارد میسازند بوسیله انتخاب مواد و ابعاد آنها خنثی ساخت .

حرکت اجسام بخواص آنها بستگی تام دارد مثلا بشکل ، بدرجه صیقلی بودن ، تشابهٔ اجزاء ، قابلیت ارتجاع ، مقاومتی که ملاء های مختلفه در مقابل آنها بمنصه ظهور میرساند و قس علیهذا .

علوم مذکوره فوق کاملا نمیتواند اوضاع مختلفهٔ حرکت جسمی‌را تحت محاسبه در آورده و پیش بینی نماید بلکه در اینمورد مجبورند بجای اجسام‌حقیقی اجسام‌مجازی دیگری‌که دارای خواص‌مختلفه ساده‌تری میباشند اختیار نمایند ، علمی که در خصوص چنین اجسام گفتگو میکند به **مکانیك استدلالی** Mécanique rationnelle موسوم میباشد .

با وصف آنکه مکانیك استدلالی از موضوع عمل خارج است در بسیاری حالات اوضاع و کیفیاتی را پیش بینی مینماید که بعضی اوقات با تقریب کمی نتایجی از آن عاید میگردد ، ولی برای مصون ماندن از خطا لازم است که نتایج حاصله از آنرا بوسیلهٔ تجربه و مشاهده که خود میتواند باعث کشف بعضی آثار فراموش شده بشود تحت امتحان آورد .

بالاخره نباید این نکته را از نظر محو داشت که مکانیك استدلالی اساسا در مورد اوضاع طبیعی و مخصوصا در تحقیق حرکات سماوی به نتایج حتمی میرسد .

۲ - نقطه مادی - جسمی که دارای ابعاد بینهایت کوچك باشد بقسمی که بتوان از آنها صرف نظر نمود به نقطه مادی موسوم است .

۳ - جرم - وقتی جسمی تحت تاثیر بعضی اعمال بحرکت در میآید خواص اینحرکت از طرفی مربوط بمسبب های آن و از جهت دیگر بخود

جسم بستگی دارد .

مثلا درب فاصل بین دو اطاق و درب بزرگ عمارت برای آنکه بحرکت در آیند باید تحت تاثیر جد و جهدهای مختلفه قرار گیرند .

و همچنین برای توقف آنها کوشش های مختلفه لازم است در موقع حرکت یا توقف یك نوع مقاومت بمعرض ظهور نمیاورند .

برای آنکه در جادهٔ مسطحی درشکه را در دو حال (یکمرتبه خالی و یکمرتبه پر از بار) که با یکسرعت سیر مینماید متوقف سازیم باید قوای مختلف بکار اندازیم .

مقاومت در حرکت مشخص هر جسم بطور وضوح در ماشین **آتوود** Atwood ملاحظه میشود ، دو جسم متعادل A و B که بدوسر ریسمانی که از قرقرهٔ متحرکی عبور مینماید بسته شده اند ، چنانچه بر یکی از اجسام مثلا بر A جسم M را بیافزائیم مجموعهٔ اجسام A و B و M و رشته و قرقره در جهت سهم بحرکت در میآیند . شتاب در اینحرکت از سقوط آزاد جسم M خیلی ضعیفتر است سبب حرکت وزن جسم M است ، آثار حرکت به تغییر اجسام تغییر مینماید (س ۱) .

س ۱

بخصوص اگر بجای اجسام AوB اجسامی از این نوع ولی با ابعاد بیشتر قرار دهیم ، شتاب مشهود خیلی کمتر میگردد و بعبارهٔ دیگر دستگاه در مقابل حرکت مقاومت زیادی بروز میدهد ، بقسمی که میتوان گفت برای اجسام متحد النوع مقاومت نسبت مستقیم با مقدار مادهٔ مشکله جسم دارد .

مشاهده کیفیات فوق توجه به نکته ذیل را ایجاب مینماید .

هر نقطه مادی متناظر با عددی است که مشخص مقاومت آن در حرکت میباشد ، این عدد مقدار جرم نقطه است .

در جر اثقال جرم هر نقطه مادی ممیز آن است ؛

نکته فوق منوط باین شرط است که نقطه‌مادی مفروض تحت تاثیر هیچیك از اعمال فیزیکی یا شیمیائی قرار نگیرد .

همواره جسم را مرکب از تودهٔ نقاط مادی ملاحظه میکنیم بقسمی که جرم آن مجموع اجرام نقاط مزبور باشد .

همانطور که برای سنجش سایر کمیات واحدی لازم بود برای اندازه گرفتن اجرام نیز واحدی انتخاب میشود بنابر این واحد جرم عبارت از جرم مخصوصی خواهد بود

بعدها خواهیم دید چگونه بوسیله ترازو میتوان نسبت دو جرم و در نتیجه مقدار یك جرم را معین ساخت . تغییر واحد جرم باعث این میگردد که کمیات اجرام دیگر را که باواحد معینی سنجیده شده در عاملی ضرب نمایند.

قبل از آنکه واحد جرم را متذکر شویم لازم است تعاریف دیگری که مربوط بمکانیك نقطه است بیان نمائیم .

۴ ـ قوه ـ مطالعه در حرکت سهمی شکل نسبت بزمین معلوم مینماید که شتاب سقوط بستگی به نوع و سرعت حرکت ندارد . این شتاب دارای امتداد ثابتی است که آنرا قائم مکان میخوانند وآن بطرف تحت متوجه‌است

در مورد حرکت سیارات نسبت بدستگاه ثابتی مرکب از محورهائی که از مرکز خورشید به نقاط ثابتهٔ نسبت بکواکب وصل میگردند نیوتن ثابت کرده است که حرکات مزبور همانحرکاتی میباشند که اگر خورشید بهر یك از سیارات عملی وارد نماید در آنها شتابی تولید میگردد که بسمت مرکزخورشید متوجه بوده و مقدارش برابر خارج قسمت مقدار ثابتی است بر مجذور فاصلهٔ هر یك از خورشید . و بسبب همین شتاب است که حرکت انجام میگیرد .

بعلاوه ماشین آتوود کاملا معلوم مینماید که عمل وارد باجرام مختلف در آنها شتابهائی تولید مینماید که به نسبت ترقی اجرامشان تنزل مینمایند. از بیانات فوق میتوان تعریف ذیل را برای قوه نمود:

اگر نقطه مادی که بجرم m است دارای حرکتی باشد که شتابش بصورت حاملی مانند γ نموده شده، گویند حرکت این نقطه همان حرکتی‌است که تحت تأثیر قوهٔ برابر حامل $(F)=(m\gamma)$ در آن ایجاد میگردد.

در رسم، حاملهای نمایش قوه با مقیاس معینی که آنرا مقیاس قوه میگویند نموده میشود.

۵ ـ جبر Inertie ـ چنانچه قوهٔ بر نقطه مادی وارد نگردد شتابش صفر است. **نقطه یا بحال سکون است یا دارای حرکتی مستقیم و متشابه میباشد.**

نکته فوق‌که امروز مقبول عموم است نتیجه مستقیم تعریف قوه میباشد ولی نزد نیو تن قوه منشاء دیگری داشته و بهمین علت است که او مطلب فوقرا به اصل معین دیگری موسوم به اصل جبر مبتنی ساخته است.

فرض میکنیم نقطه M بر مسیر T در جهت سهم متحرك باشد و در موقع رسیدن به P قوائی که بر آن اثر مینمودند حذف کنیم، پس از این شتابش صفر خواهد شد یعنی حرکتش مستقیم‌الخط و متشابه میگردد. بعلاوه تغییرات قوی و بعبارهٔ اخری تغییرات شتاب، سرعت را در لحظه حذف قوی بصورت حاملی مانند PV در میاورد بقسمی که حرکت مستقیم الخط مزبور از نقطه P با سرعت (PV) شروع میگردد

س ۲

وبخصوص مسیر جدید متحرك برامتداد مماسی است که از نقطه P برمسیر قدیم رسم گردد (س ۲).

٦ ـ شرائط اولیه ـ چنانچه وضع و سرعت متحرکی در لحظهٔ مخصوصی مانند t_0 مشخص باشد گویند شرائط اولیه متحرك معین است هرگاه شرایط اولیه متحرکی بجرم معین معلوم باشد و بعلاوه بدانیم بر آن قوهٔ مشخصی وارد شده، حرکتش کاملا معین میگردد.

نکته فوق حکمی است که بوسیله ریاضیات مقدماتی اثبات میشود وآنرا باین عبارت ادا مینمایند: **حرکت‌متحركٔ مادی بجرم m بوسیلهٔ شرائط اولیه آن وقوه که بر آن وارد میگردد کاملا معین میگردد.**

دو اصل موضوع اساسی مکانیك نقطه

۷ ـ تساوی عمل و عکس العمل ـ اگر نقطه مادی A برنقطه مادی B اثری وارد نماید این عمل قوه است که بر B در امتداد خط AB وارد میگردد بعلاوه عمل B بر A که به عکس العمل موسوم است نیز قوهٔ متقابل با عمل A بر B است این قوی ممکن است دافعه یا جاذبه باشند (س ۳).

چنانچه m_A ، m_B جرمهای نقاط A و B فرض شوند این نقاط تحت تأثیر اعمال مشترکه خود دارای‌حرکاتی میشوندکه شتابهایشان γ_A و γ_B بوسیله رابطهٔ $m_A\gamma_A=m_B\gamma_B$ بیکدیکر بستکی دارد. طرف اول این تساوی مقدار قوه وارده بر A وطرف ثانی مقدار قوه وارده بر B است.

س ۳

۸ ـ عدم بستگی آثار قوی ـ اکر قوای F_1 و F_2 و . . . و F_n هریك جداگانه بریك نقطه مادی اثر نمایند و در آن شتابهای γ_1 و γ_2 و . . . و γ_n را ایجاد کنند عمل

متناظر با این قوی در نقطه مفروض شتابی مانند γ ایجاد مینماید که نتیجه شتابهای γ_1 و γ_2 و . . . و γ_n است .

اکر m جرم نقطه مزبور اختیار کردد قوه واحدی که قابل ایجاد همان حرکتی باشد که از مجموع قوای مزبور احداث میشود بصورت حامل $(m\gamma) = (F)$ نموده خواهد شد و بنا بر اصل فوق حامل $(m\gamma)$ منتجه حاملهای $(m\gamma_1)$ و $(m\gamma_2)$ و . . . و $(m\gamma_n)$ میباشند. بنا بر این میتوان تساوی هندسی ذیل را نوشت :

$$(F)=(F_1)+(F_2)+\dots+(F_n)$$

و از اینجا چنین نتیجه میشود که میتوان اصل عدم بستکی آثار قوای وارده را بدین عبارت بیان کرد :

چند قوه که متناوباً بر یك نقطه مادی وارد گردند بر آن همان اثر را وارد میسازند که یك قوه برابر منتجه قوای مزبور احداث مینماید . این قوه واحدرا منتجه قوای مفروض وهریك از آنها را مولفه های منتجه مینامند و بخصوص منتجه دو قوه که بر یك نقطه اثر نموده باشند قطر متوازی الاضلاعی است که قوای مزبور دو ضلع مجاورش باشند .

۹ ـ مکانیك ارضی ـ تعریف قوه همچنین طرح اصول موضوعه مذکور حاوی اشکالی نسبت بدستکاه مقایسه میباشند. شتاب هر حرکت به دستکاهی که حرکت منسوب بدان است بستکی دارد . اکر بخواهیم قوهٔ مسبب حرکت چنین نباشد بایستی برای جمیع حرکات دستکاهی انتخاب کرده آنهارا بدان نسبت دهیم این دستکاه همان است که نیوتن حرکات سیارات را بدان نسبت داده و آن مرکب از محورهائی است که از حوالی مرکز خورشید (مرکز ثقل منظومه شمسی) عبور مینمایند و امتداد آنها نسبت بکواکب ثابت است . چنین دستکاهی را دستکاه نجومی مینامند . محورهای این دستکاه را بنا بر تعریف محورهای ثابت میخوانند .

بغیر از بعضی حالات استثنائی (مثلا در تجربه پاندول فوکو) شتاب هر نقطه نسبت بزمین همان است‌که اگر زمین را دستگاه ثابت فرض نموده و بقوای F_1 و F_2 و . . . و F_n وارده بر نقطه قوهٔ دیکری موسوم **بوزن‌نقطه** اضافه نمائیم ؛ قوهٔ اخیر بصورت حاملی نموده میشود که در امتداد قائم از فوق به تحت ممتد است و مقدار آن برابر mg میباشد ، m جرم نقطه و g عددی است که بنقطه بستکی نداشته و بشتاب ثقل موسوم است .

پس از این ما نیز محور های ثابت را منسوب بزمین اختیار نموده همچنین نقطهٔ که نسبت بزمین ثابت است بعنوان مبداء اختیار مینمائیم .

غالبا اتفاق میافتد که در بعضی مواقع در مورد سکون یا حرکتی درسطح زمین وزن نقطه نسبت بقوای دیکری که بر آن وارد میکردند غیر قابل ملاحظه‌است . وقتی چنین نباشد یعنی وزن نقطه نیز منظور نظر باشد میکوئیم **نقطهٔ وزین** مفروض است .

۱۰ ـ تعادل ـ نقطه مادی وقتی بحال **تعادل** است که تحت تأثیر هیچ قوه نباشد ویا بعبارت‌دیکر قوای وارده بدان درآن هیچ شتابی تولیدننمایند

دراینحالت اولا اگر نقطه دارای سرعتی است حرکتش همواره مستقیم الخط و متشابه باقی خواهد ماند و دراینحال تعادل آنرا **دینامیکی** میکویند .

ثانیا ـ اکر در یك لحظه بیحرکت باشد همواره بهمین حالت باقی خواهد ماند و در اینصورت تعادل نقطه را **استاتیکی** میگویند و موضوع بحث ما در تعادل استاتیکی است .

۱۱ ـ نقطه آزاد و نقطه غیر آزاد ـ وقتی نقطه‌را **آزاد** میکویند که بتواند حرکتش را بدون هیچ مانعی در جمیع جهات تحت اثر قوای وارده انجام دهد ؛ هرگاه بواسطه موانعی نقطه مادی نتواند حرکت خودرا تحت اثر قوای وارده در جمیع جهات انجام دهد آنرا **غیر آزاد** میکویند . چنین نقطهٔ تحت اثر دو نوع قوه است یکی **قوای مستقیم** یعنی آنهائی

که مستقیما بآن وارد میشوند مثلا وزن نقطه مادی، دیگری **قوای ارتباطی** که بوسیله موانع ایجاد میکردند قوای اخیر هرکز قبلا معین نیستند بلکه بنوع ارتباط و اثر قوای مستقیم بستکی دارند.

۱۲ - تعادل نقطه مادی آزاد - قضیه ۱ - شرط لازم و کافی برای آنکه نقطهٔ مادی آزادی بحالت تعادل باشد این است که منتجه قوای وارده بدان برابر صفر باشند.

اولا شرائط لازم است - چه بمناسبت آنکه $R=m(\gamma)$ و $(\gamma)=0$ نتیجه میشود $(R)=0$.

ثانیا شرائط کافی است - زیرا اکر $(R)=0$ حاصل میشود $(\gamma)=0$ یعنی نقطه بحال تعادل است.

مثال ۱ - قضیه۲. شرط لازم و کافی برای آنکه نقطهٔ تحت تاثیر دو قوه بحال تعادل باشد این است که قوای مزبور متقابل باشند.

مثال ۲ - قضیه۳. شرط لازم و کافی برای آنکه نقطه تحت تاثیر سه‌قوه بحال تعادل باشد این است که قوای مزبور در یك صفحه واقع بوده بعلاوه هر یك از آنها خارج زاویه دو قوه دیکر واقع باشند و بالاخره کمیت هریك متناسب با جیب زاویهٔ دو قوه باشد.

(مسئله ۱۰ تمرینات مبحث حاملها صفحه ٦١ کتاب اول)

مثال ۳. مقصود تعیین قوائی است که در امتداد ارتفاعات مثلثی واقع بوده و تشکیل دستکاهی بحال تعادل دهند.

فرض میکنیم قوای F_1 و F_2 و F_3 بنقطه M یعنی محل تلاقی ارتفاعات مثلث وارد شوند پس اولا بفرض قوای مزبور در یك صفحه‌اند پس باید هریك از آنها بطرف راس نظیر یا ضلع مقابل بدان متوجه باشند تا شرط دوم بر قرار شود از طرف دیکر بنا بر مثال ۲ لازم است تساویهای ذیل بر قرار کردد:

س ٤

$$\frac{F_1}{\sin(F_2,F_3)}=\frac{F_2}{\sin(F_1,F_3)}=\frac{F_3}{\sin(F_1,F_2)}$$

اما $(F_2,F_3)=\pi-A$ و $(F_1,F_3)=\pi-B$ و $(F_1,F_2)=\pi-C$ پس

$$\frac{F_1}{\sin A}=\frac{F_2}{\sin B}=\frac{F_3}{\sin C} \quad \text{و یا} \quad \frac{F_1}{a}=\frac{F_2}{b}=\frac{F_3}{c}$$

یعنی کمیت هریك از قوی باید متناسب با ضلعی باشد که بر آن عموداست.

۱۳ - استاتیك نقطه غیر آزاد - تماس متحرکی با یك سطح یا یك منحنی - فرض میکنیم نقطه بر سطح یا منحنی ثابتی تحت اثر قوای مفروضی در حرکت باشد. منتجهٔ این قوی را (R) فرض مینمائیم (وزن نقطه خود یکی از قوی است) دو حالت تشخیص میدهیم:

اولا متحرك بقسمی است که نمیتواند از سطح یا منحنی مسیر خود از یك طرف یا از جانب دیگر از آنها جدا گردد مانند آنکه کلوله را بین دوسطح متوازی که فاصله آنها برابر قطر کلوله است بحرکت در آوریم یا آنکه کلوله را داخل لوله که قطرش برابر قطر کلوله باشد بحرکت در آوریم.

ثانیا متحرك فقط از یك طرف بسطح یا منحنی مسیر خود متکی است (ارتباط یکطرفه) بنا بر این میتواند از طرف دیگر از مسیر خود خارج کردد در اینصورت باید جزء شرائط تعادل قید کنیم که منتجه (R) لازم است بقسمی ممتد باشد که همواره نقطه‌متحرك را بر سطح یا منحنی مسیر خود بچسباند.

۱۴ - بعضی نتایج اصول موضوعه - ۱ - چنانچه M نقطه وزینی باشد که بر میز افقی T نهاده شده این نقطه تحت اثر وزن خود p که درامتداد قائم مکان است وقوهٔ دیگری که عکس‌العمل میز است بحال تعادل خواهد بود، قوه اخیر متقابل با وزن p است و آنرا بصورت حامل N نمایش داده ایم.

س ٥

بنا بر اصل تساوی عمل وعکس‌العمل نقطه در محل تماس خود μ بامیز قوه دریافت مینماید و از طرف دیگر بر همین نقطه عملی وارد میکند که متقابل با قوهٔ مزبور است . این قوه را با همان حامل نمایش p مینمایند و آنرا فشار نقطه M بر میز میخوانند .

حال فرض میکنیم میز بحال آزادی ساقط گردد شتاب آن هنگام سقوط همان شتاب ثقل است ، نقطه M که بجرم m است نیز با همین شتاب سقوط مینماید ، منتجهٔ قوائی که بر این نقطه اثر مینمایند تبدیل بقوه قائمی میگردد که کمیتش برابر mg یعنی وزن آن است ؛ **بنا بر این عمل نقطه μ هنگام سقوط نسبت بنقطه M صفر است .**

چنانچه میز در امتداد قائم با شتاب g' که کمتر از g فرض شده سقوط کند منتجه قوائی که بر M وارد میگردد عبارت از mg' خواهد بود ولی چون یکی از این قوی mg یعنی وزن نقطه m میباشد ؛ دیگری که عکس‌العمل میز است باید بطرف بالا ممتد بوده و مقدارش برابر $mg-mg'$ باشد بقسمیکه فشار نقطه M بر میز در اینصورت برابر $mg-mg'$ میگردد و این قوه از فوق بتحت ممتد است .

هنگامیکه منیر از تحت بطرف فوق حرکت نماید و شتاب آن g' باشد منتجه قوائی که بر M اثر مینمایند بطرف بالا ممتد بوده و مقدارش mg' است بنا بر این باید عکس العمل میز بطرف بالا ممتد بوده و کمیتش مساوی $mg+mg'$ باشد .

بسهولت ممکن است جهت و کمیت منتجه قوی را بوسیلهٔ آسانسور تجربه نمود . باین ترتیب که شخصی در قپانی اتوماتیك بوسیلهٔ آسانسور بطرف بالا حرکت نماید ، هنگامیکه اسانسور صعود مینماید وزنی که در قپان نموده میشود زیاد تر از وزن شخص مزبور است ، وقتی که حرکت آسانسور متشابه میگردد یعنی شتابش صفر میشود شتاب شخص نیز صفر

گردیده درنتیجه عملی که‌قپان به شخص واردمیسازد بایدمساوی‌وزن او باشد در اینصورت قپان‌وزن شخص را نشان میدهد ، بالاخره موقعیکه حرکت آسانسور مبطئه میگردد یعنی قبل از توقف آسانسور شتاب بطرف پائین ممتد بوده و قپان وزنی کمتر از وزن شخص نشان خواهد داد . عینا شبیه بهمین اوضاع هنگام پائین آمدن مشاهده میگردد .

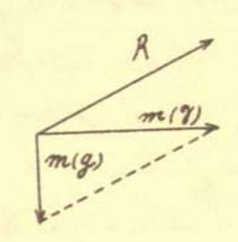
هنگامی که شخص از زمین پرش مینماید عضلاتش از خود اثری بر زمین واردمیسازند بقسمی که در آن عکس العملی تولید کنند تا عکس‌العمل مزبور قابل ایجاد شتابی مانند g که بطرف بالا ممتد است باشد . این عکس‌العمل دارای مقداری برابر $mg+mg'$ است و بواسطه همین قوه است که شخص پرنده قبل از پریدن بر زمین فشاری وارد میاورد و میتوان بوسیلهٔ قپانی معین کرد که این عکس العمل از وزن شخص زیاد تر است . و نیز بهمین علت است که پرنده هنگام پریدن از شاخی بشاخ دیگر باعث انعطاف شاخه میشود .

ب ـ فرض میکنیم مسافری در واگون سوار بوده و حرکت ترن نسبت باو از عقب شخص ممتد باشد . در توقفگاه وزن مسافر بفرض آنکه عمودی نشسته باشد متقابل با عکس العمل نیمکتی است که برآن قرار گرفته وقتی ترن حرکت مسرعه خود را خفیف مینماید . اگر (γ) شتاب آن در لحظهٔ باشد . برای آنکه حرکت مسافر نیز دارای شتاب (γ) باشد باید منتجه قوائی که بر او اثر مینمایند برابر $m\gamma$ شود و ضمنا در جهت مسیر ترن ممتد باشد (m جرم مسافر است) .

چون وزن mg از مسافر و عکس العمل R نیمکت را با یکدیگر تالیف نمائیم باید قوه $m\gamma$ حاصل شود . باین ملاحظه میتوان (R) را بدست آورد و معلوم ساخت که عمل مسافر بر نیمکت باید بقسمی باشد که همواره بر

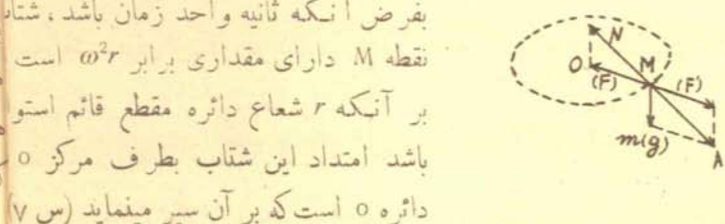
پشتی نیمکت تکیه دهد چنانکه همه‌میدانیم .

هرگاه مسافری در جهت عکس جهت فوق نشسته باشد فقط تحت عمل فشار پاهای خود بر کف واگون یا قوهٔ متعادل با آن میتواند بحال تعادل باقی ماند . شدت اوضاع مذکور فوق بستگی بکمیت شتاب γ دارد و بهمین علت است که اگر اتومبیلی ناگهان متوقف گردد مثلا هنگام مصادمه با درخت یا بر آمدگی و امثال آن مسافرین در مقابل عمل R نمیتوانند عکس العملی که متقابل با آن باشد بروز دهند باین جهت بخارج پرتاب میشوند و سرعت این حرکت برابر آخرین سرعت اتومبیل قبل از تصادم است .



س ٦

ج- فرض میکنیم بر سطح خارجی استوانه دواری با محور قائم قطرهٔ مایع M که بجرم m است قرار داشته باشد ، استوانه را بحرکت متشابه حول محور خود بحرکت در میاوریم ، چنانچه n عدد دورهائی باشد که استوانه در یك دقیقه میزند مقدار سرعت زاویهٔ آن $\omega = \frac{2\pi n}{60}$ خواهد بود بفرض آنکه ثانیه واحد زمان باشد ، شتاب نقطه M دارای مقداری برابر $\omega^2 r$ است بر آنکه r شعاع دائره مقطع قائم استوانه باشد امتداد این شتاب بطرف مرکز o دائره o است که بر آن سیر مینماید (س ۷) قوه $(F) = (m\gamma)$ که باعث اینحرکت میگردد منتجه قوائی است که بر M وارد میشوند یعنی منتجه mg وعمل N



س ٧

از استوانه است . عمل نقطه M بر استوانه بصورت حامل MA متقابل با حامل MN میباشد ، این عمل را میتوان بعنوان منتجه وزن قطره و قوهٔ دیگری مانند F' که متقابل با F است دانست ، هنگامیکه این عمل کافی باشد برای آنکه اصطکاك قطره را بر استوانه از بین ببرد، قطره از استوانه جدا شده و بر مسیری مماس بر دائره C سیر خواهد کرد همانگونه که سنگ موقع بیرون آمدن از فلاخن حرکت میکند .

برای آنکه کمیت وزن وقوه F مشخص شود فرض میکنیم $n = ١٠٠٠$ و $r = ٠{,}٥٠$ مقدار شتاب γ بحسب ثانیه چنین است $٥٠ \times \left(\frac{١٠٠\pi}{٣}\right)^٢$ این عدد از $١٠^٥ \times ٥$ زیاد تر است و حال آنکه g از $١٠^٣$ کمتر است $(g = ٩٨١)$ بنا بر این ثقل را میتوان در استدلال فوق صرف نظر کرد .

شرائط لازم برای تعادل یکدستگاه نقطهٔ مادی

۱۵ ـ قوای داخلی . قوای خارجی ـ قوائی که بیکدسته نقاط مادی وارد میشوند دو نوع اند : **قوای داخلی** که عبارتند از عمل و عکس العمل‌های مشترکه نقاط مختلفهٔ دستگاه نسبت بیکدیگر که این قوی بنا بر اصل تساوی عمل و عکس‌العمل دو بدو متقابل اند . **قوای خارجی** وآنها عبارتند از قوائی که از خارج بر دستگاه وارد میگردد .

امثله ـ ۱ ـ فرض میکنیم کیسه پر از سیب بر میزی قرار داشته باشد برای دستگاه مرکب از مجموعه سیب ها وکیسه وزن سیب ها و کیسه همچنین عکس العمل میز در مقابل این فشار عبارت از قوای خارجی هستند اما عکس‌العمل های سیب ها نسبت بیکدیگر وهمچنین عکس‌العملهای کیسه نسبت به سیب‌ها یا بالعکس قوای داخلی محسوب میشوند .

برای هرسیب به تنهائی اعمال سیب های دیگر بمنزله قوای خارجی بشمار میایند و برای دستگاه مرکب از میز و کیسهٔ سیب عکس العمل مشترك میز و کیسه قوای داخلی خواهد بود تنها قوه خارجی در اینمورد

وزن دستگاه مرکب از میز و کیسه و عکس‌العمل متقابل آن از زمین است

۲ ـ زنجیری را فرض میکنیم که بوسیله دو انتهایش بدو نقطه ثابت A و B آویخته شده باشد. برای تمام زنجیر قوای خارجی عبارتند از عکس العملهای نقاط A و B و وزن جمیع دانه های زنجیر و عکس العملهای مشترك دانه ها نسبت بهم قوای داخلی خواهند بود.

برای هر دانه به تنهائی قوای خارجی عکس العملهای دو دانه مجاور و وزن هریك از آنها است.

۳ ـ قرقره که از آن ریسمان AB عبور کرده فرض مینمائیم بمنتهای B باری بسته شده که بر AB قوهٔ مانند Q وارد میسازد. بمنتهای A قوهٔ مانند P بقسمی وارد میسازیم که باقوه Q تقابل نماید. برای دستگاه مرکب از ریسمان و قرقره قوای خارجی عبارتند از قوای P و Q و وزن دستگاه و عکس‌العمل محور قرقره عمل وعکس العملهای مشترك نقاط قوس CD و نقاط مختلفه ریسمان نسبت باین قوس قوای داخلی خواهندبود.

ش ۸

بر خلاف اگر ریسمان را به تنهائی در نظر بگیریم عمل نقاط قوس CD بر آن قوای خارجی محسوب میگردند.

۴ ـ برای مایعی که در ظرفی بحال تعادل است قوای خارجی عبارتند از وزن نقاط مختلفه مایع وفشار جو بر نقاط مختلفه سطح آزاد مایع و فشاری که از جدار ظرف بر آن وارد میگردد.

برای دستگاه مرکب از مایع و ظرف عکس العمل جدار ظرف بمنزلهٔ قوای داخلی محسوب میگردد و قوای خارجی عبارتند از وزن مجموع مایع و ظرف و فشاری که از جو وارد میگردد و عکس العمل جدار خارجی ظرف در مقابل فشار.

۱۶ ـ قضیه اصلی ـ هرگاه یکدسته نقاط مادی بحالت تعادل باشند حاملهائی که نمایش قوای خارجی میباشند تشکیل دستگاهی معادل با صفر میدهند.

چنانچه S_i دستگاه مرکب از حاملهای نمایش قوای داخلی باشد این قوی دو بدو متقابل میباشند بنا بر این دستگاه S_i معادل با صفر است. منتجه انتقالی OR_i وعزم مجموع OG_i از این دستگاه نسبت بنقطه غیر مشخص O نیز مساوی صفر میباشد.

هرگاه S_e دستگاه مرکب از قوای خارجی و OR_e و OG_e منتجه انتقالی و عزم مجموع ایندستگاه نسبت به نقطه O فرض شوند چون بنا بفرض دستگاه نقاط مادی مزبور بحال تعادل‌اند هریك از نقاط مشکله دستگاه نیز بحال تعادل خواهد بود و در نتیجه حاملهای نمایش قوای وارد بهر نقطه خواه قوای داخلی خواه قوای خارجی باشند باید تشکیل دستگاه معادل با صفر بدهند یعنی بعبارة اخری باید دستگاه S که مرکب از دو دسته قوای مزبور است معادل صفر گردد. ولی چون این دستگاه معادل با مجموع دو دستگاه S_e و S_i است پس منتجه انتقالی آن نیز عبارت از منتجه دو حامل OR_e و OR_i میشود، این منتجه نظر باینکه دستگاه S معادل صفر است برابر صفر میشود وچون حامل OR_i نیز صفر است پس حامل OR_e صفر خواهد گردید و بهمین دلیل حامل OG_e نیز مساوی صفر میشود. یعنی دستگاه S_e معادل صفر میگردد.

۱۷ ـ شش شرط لازم برای تعادل ـ اگر ox و oy و oz محورهای مختصات اختیار شوند برای آنکه حاملهای OR_e و OG_e برابر صفر شوند لازم و کافی است که تصاویرشان بر سه محور صفر گردد بنا بر این میتوان گفت که قوای خارجی یکدستگاه باید دارای شش شرط مزبور باشند تا دستگاه بحال تعادل قرار گیرد.

سه‌شرط از شرائط مزبور اینستکه مجموع مقادیر جبری تصاویر قوای خارجی

بر سه محور متعامد برابر صفر باشند و سه شرط دیگر آنکه مجموع مقادیر جبری عزمهای آنها نسبت باین محورها صفر شود .

معمولا شرائط مزبور را تحت معادلات ذیل نمایش میدهند :

$$L=M=N=0 \quad , \quad X=Y=Z=0$$

تبصره ــ شرائط مذکور لازم اند ولی کافی نیستند مثلا اگر یك قطعه کائوچوك تحت تاثیر دو قوه متقابل باشد بحال تعادل نمیماند و حال آنکه این قوی حاوی شرائط فوق میباشند چنانکه بعد ها خواهیم دید وقتی شرائط کافی است که جسم مفروض صلب باشد .

۱۷ ــ مورد استعمال . کشش نخ ــ چنانچه AB قطعه نخی بجرم غیر قابل ملاحظه متعلق بدستگاهی بحال تعادل باشد و T_A منتجه جمیع اعمال نقاط دیگر دستگاه بر نقطه A از قطعه AB اختیار گردد و نیز T_B منتجه قوای وارده بر نقطه B از قطعه AB فرض شود .

T_A A T'_C C T_C B T_B

ش ۹

جرمهای نقاط مختلفه قطعه AB و همچنین اوزان آنها که حاصلضرب g در مقدار m است غیر قابل ملاحظه میباشد ، چنین فرض میکنیم که هیچ قوه خارجی بر قطعه AB اثر ننموده باشد تنها قوای خارجی وارد بر این قطعه T_A و T_B میباشند و این قوی متقابل خواهند بود و محملشان بر خط AB قرار دارد حال اگر C نقطه غیر مشخصی از قطعه AB باشد و رشته را از نقطه C قطع نمائیم و قطعه BC را بر داریم برای آنکه تعادل قطعه AC بر قرار شود باید نقطه C از این قطعه تحت تأثیر قوه T_C قرار گیرد و بنا بر استدلال فوق لازم است که قوهٔ T_C بر امتداد T_A واقع بوده و در نتیجه نقطه C بر خط AB قرار داشته باشد و از اینجا این نتیجه عاید میگردد :

هر قطعه از رشته قابل انعطاف بدون جرم که متعلق بدستگاهی بحال تعادل است لزوماً مستقیم الخط است ، وقتی تنها قوای خارجی بر این قطعه نخ بدو منتهایش اثر نمایند .

هر نقطه مانند C از قطعه AB را میتوان بعنوان قطعهٔ ملاحظه نمود که از یکطرف و جانب دیگر تحت تاثیر قوای متقابله T_C و T'_C است وکمیت قوای مزبور برای جمیع نقاط خط AB یکسان است این قوی **کشش** رشته‌اند، بنا بر این **کشش رشته برای جمیع نقاط قطعه AB مقدار ثابت است .**

چون رشته قابل انعطاف است واضح است برای آنکه نخ ممتد باشد باید قوای T_A و T_B بقسمی باشند که در شکل (۹) ملاحظه میشود .

نتایج فوقرا در مورد **شاقول** ملاحظه مینمائیم که مرکب است از نقطه A بجرم m که بنقطه ثابت O بوسیله ریسمانی قابل انعطاف بسته شده جرم OA غیر قابل ملاحظه است ، نقطه A تحت تاثیر قوه وزن خود (mg) و عمل رشته برنقطه A یعنی همانقوهٔ که متقابل با وزن A است بحال تعادل میباشد . نقطه مادی A بر نقطه A از ریسمان قوه T_A را که متقابل با عمل رشته بر A است وارد میسازد این قوه یعنی T_A بصورت همان حاملی که نمایش وزن (mg) است نموده میشود .

قوای وارده بر ریسمان عبارتند از T_A و عکس العمل نقطهٔ ثابت O ، این قوی دارای امتداد مشترك OA میباشند و بهمین جهت است که : **شاقول همواره امتداد قائم مکان را معین میسازد .**

۱۸ ــ وزن جسم ــ میتوان جسم را مرکب از تودهٔ نقاط مادی فرض نمود ، سقوط جسم را در خلاء بواسطه آویختن به نقطه A متوقف میسازیم ، قوای خارجی که جسم تحت تاثیر آنها است عبارت اند از عمل F نقطه تعلیق A و وزنهای p_1 و p_2 و p_3 و ... و p_n و

A

ش ۱۰

نقاط مختلفه جسم . اما وزنها قوای متوازیه‌اند و منتجه انتقالی آنها که درامتداد قائم مکان و بطرف تحت ممتد است دارای مقداری برابر $P=p_1+p_2+\dots+p_n$ میباشد .

بنا بر این قوه F که باید معادل با اوزان p_1 و p_2 و ... و p_n باشد در امتداد قائم خواهد بود . این قوه بطرف بالا ممتد بوده و مقدارش P است بنا بر این اثر جسم بر نقطه تعلیق A بصورت قوهٔ خواهد بود که بطرف پائین ممتد بوده ومقدارش برابر P است **این قوه بنا بر تعریف وزن جسم است** و یا بعبارت دیگر **وزن جسم عبارت از مجموع اوزان نقاط مختلفه آن است** .

۱۹ ـ جرم جسم ـ جرم جسم بنا بر تعریف برابر مجموع اجرام نقاط مختلفه آن است . اگر M جرم جسم و m_1 و m_2 و ... و m_n جرم نقاط مختلفه آن باشد این رابطه بر قرار است :

$$M=m_1+m_2+\dots+m_n$$

چون طرفین تساوی را در g ضرب نمائیم و ملاحظه کنیم که طرف ثانی آن همان وزن P از جسم است حاصل میشود .

$$Mg=P$$

اما چون M بستگی بطریقهٔ که جسم را مرکب از نقاط مادی تصور کرده ایم ندارد معلوم میشود جرم M نیز بستگی بآن ندارد .

۲۰ ـ تعیین مقدار جرم بوسیله ترازو ـ A را نقطه تعلیق یکی از کفه‌ها و p را وزن این کفه و P را وزن جسم S واقع دراین کفه اختیار مینمائیم . فرض میکنیم بوسیله جسم T که در کفه دیگر قرار داده ایم شاهنگ ترازو بحال تعادل باشد .

دستگاه حاصل از جسم S و کفه که در آن این جسم را قرار داده‌ایم تحت قوای خارجی که وزن p و وزن P و عکس‌العمل نقطه A از شاهنگ

بر کفه ترازو میباشند ، بحال تعادل است . بوسیلهٔ استدلالی که قبلا متذکر شدیم معلوم میشود که این عکس العمل قائم و ممتد درجهت فوق میباشد مقدارش برابر $p+P$ است ، بنا بر این عمل کفه نسبت بشاهنگ بنا بر تساوی عمل وعکس العمل قوه‌قائمی است که مقدارش $p+P$ بوده و بطرف پائین ممتد است و نقطه اثر این قوه همان نقطه A میباشد ، و این مطلب بستگی بوضع جسم S در کفه ترازو ندارد .

ش ۱۱

قوای خارجی شاهنگ AOB عبارتند از عکس‌العمل محور O بر آن و وزن شاهنگ و عکس‌العملهای نقاط A و B بوسیله کفه ها . مجموع جبری مقادیر عزمهای این قوه نسبت بمحور O برابر صفر است و چون عزمهای عکس‌العملهای محور بمناسبت اینکه این قوی محور را قطع مینمایند صفر است لازم میاید مجموع عزمهای سایر قوای مذکور صفر شود .

حال بجای جسم S در کفه جسم دیگر S′ را قرارمیدهیم بطریقیکه باز کفه بحالت تعادل قرار گیرد اگر P′ وزن جسم S′ باشد ، عمل کفه که بر نقطه A آویخته شده عبارت از $p+P'$ خواهد بود و چون قوای خارجی دیگر کفه همانهائی هستند که درحالت اول مشاهده شد عزمهای قوای P و P′ وارد بر نقطه A نیز مانند فوق خواهند بود و از این مطلب منتجه میشود $P=P'$ حال اگر M و M′ جرمهای اجسام S و S′ باشند معلوم میگردد $M=M'$

بنا بر این تساوی دوجرم معین گردید .

گاهی ملاحظه میشود که در نتیجه اصطکاك وقتی در کفه ترازو وزن نسبتهٔ کمی قرار دهیم باز تعادل آن بر قرار میماند. باید ترازو بقدری حساس باشد که کوچکترین وزن نیز تعادل آنرا بهم بزند.

اکنون واحدی برای جرم اختیار نموده فرض میکنیم اجرام دیگری نیز معادل با این واحد ساخته باشیم. برای تعیین جرم جسم S آنرا در یکی از کفه های ترازو قرار داده و بوسیله گذاشتن وزنه در کفه دیگر تعادل را بر قرار مینمائیم بعد جسم S را بر داشته بجای آن عده کافی واحد جرم قرار میدهیم تا مجددا تعادل برقرار گردد. واضح است عده واحد های جرم برابر جرم جسم S میباشند. این عمل وقتی بهتر انجام میگیرد که قبلا اجرامی برابر مضارب واحد جرم تهیه کرده باشیم همچنین ممکن است اجرامی که اجزاء واحد جرم باشند نیز انتخاب نمود برای مواردی که جرم S مضرب صحیحی از واحد جرم نباشد.

سنجش مستقیم مقدار قوی

۲۱ ـ برای سنجش قوی وسائلی سهل در کار است که عبارتند از سنجش شتابهائی که قوای مزبور در نقاط جرمی ایجاد مینمایند.

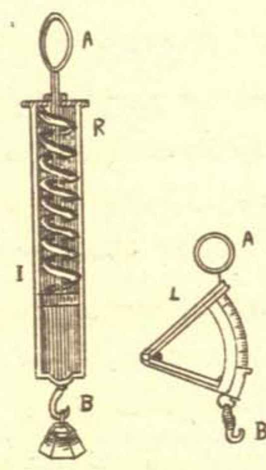
برای سنجش قوی میتوان واحدی برای قوه اختیار نمود بنا براین واحد قوه را وزن جسمی اختیار میکنیم که در مکانی معین مقدارش برابر m است پس مقدار وزن مزبور عبارت است از $p=mg$، اگر واحد قوه را همان قوهٔ اختیار کنیم که در ضمن تعیین قوه بوسیله دستور $F=m\gamma$ نموده میشد این واحد که آنرا بطور اختصار واحد عادی قوه میگوئیم عبارت از قوه است که در واحد جرم شتابی برابر واحد ایجاد نماید.

اگر p' وزن جسمی در محلی باشد که بوسیله واحد عادی قوه معین گردیده و m' جرم آن اختیار شود چنین خواهیم داشت $p'=m'g$ (g شتاب ثقل محل مزبور است).

نسبت $\frac{p'}{p}$ عبارت از وزن دوم اینجسم است با واحد اختیار شده و این مقدار برابر $\frac{m'}{m}$ نیز میباشد بقسمیکه میتوان گفت بوسیله ترازو میتوان مقدار وزن جسمی را تعیین نمود بنا بر آنکه واحد قوه وزن جسمی مخصوص در همین مکان باشد.

۲۲ ـ میزان القوه ـ قوائی بغیر از وزن موجود است که میتوان آنها را بطریقهٔ بهتری بوسیله میزان القوه تعیین نمود.

شکل (۱۲) نمایش میزان القوه هائی است که قسمت اصلی آنها فنری است که در محفظهٔ (R) قرار دارد (برای اولی) یك تیغهٔ L بشکل زاویه (برای دومی). وقتی اسبابرا بوسیله حلقه A بنقطه بیاویزند میتوان بآن وزنی را بوسیله حلقهٔ B آویخت. فنر دارای طولی معین میشود، واضح است که فنر تحت تاثیر قوای مختلفه طولهای مختلفه اختیار مینماید. بنا بر این همواره با یك وزن معین طولش مقداری مشخص خواهد شد بنا بر آنکه آثار قوای وارده برفنر در ضمن عمل باعث ارتجاع آن نشده باشند. بوسیله آویختن وزنهای معین به میزان القوه میتوان آنرا مدرج نمود.



ش ۱۲

برای سنجش قوائی غیر از وزن باید ملاحظه نمود که مقاومت متقابل بواسطه فنر بسبب تغییر شکلی که در جهت AB ایجاد میگردد تنها بستگی بشکلی (طول یا انقباض) که فنر اتخاذ میکند دارد، هنگامیکه نشانه فنر در مقابل یکی از تقسیمات مثلا D باشد قوهٔ که برنقطه B اثر نموده باید متقابل باهمین عکس العمل از فنر باشد مقدار این

قوه بوسیله عدهٔ درجات تقسیم D معین میگردد .

نیز ملاحظه میکنیم که میزان القوه وقتی تحت تاثیر قوای واصل بنقاط A و B واقع میشود بایدبقسمی باشد که قویٰ در امتداد خط AB متوجه باشند و وزن میزان القوه را درمقابل قوائی که مقصود سنجش آنها است هیچ میانگاریم

آحاد اصلی

۲۳ - آحاد اصلی معرفة القوی و علم تعادل قوی. در معرفة القوی وعلم تعادل قوی نه تنها آحاد معرفة الحرکات مورد احتیاج است بلکه برای کمیات دیگر مانند جرم و قوه نیز تعیین آحادی لازم میگردد سلسله آحادی که غالبا برای سنجش کمیات بکار میروند از اینقرارند ،

ا - سلسله متری . آحاد اصلی این سلسله عبارتند از واحد طول ، واحد جرم ، واحد زمان . واحد طول متر است ، واحد جرم تن میباشد که هزار برابر جرم یك کیلوکرام قرار دادی است واحد زمان ثانیه زمان شمسی متوسط است

ب - سلسله .CGS - سلسله .CGS یا سانتیمتر وگرم و ثانیه اختلافی با سلسله متری ندارد مگر آنکه درآن واحد طول سانتیمتر یعنی $\frac{۱}{۱۰۰}$ متر و واحدجرم $\frac{۱}{۱۰۰۰}$ جرم یك کیلوگرم قرار دادی است در این سلسله واحد قوه دین است وآن قوه ایست که چون بریك گرم جرم وارد شود درآن شتابی برابر واحد طول ایجاد نماید .

ج - سلسله .M.S.KF - آحاد اصلی این سلسله عبارتند از متر و ثانیه زمان شمسی متوسط و وزنی که یك کیلوگرم جرم قرار دادی در پاریس در سطح آبهای ساکن دارد (کیلوگرم فرس)

در این سلسله واجد جرم عبارت از واحد مشتق است بقسمی که دستور $F=m\gamma$ مقدار قوه را بجرم و شتابی که در آن جرم از قوه ایجاد میگردد ربط دهد .

برای وقتی که $m=۱$ نتیجه میشود $F=\gamma$ واحد جرم عبارت از جرمی است که اگر بر آن قوه وارد شود در آن شتابی ایجاد کند که عدداً مساوی قوه وارده باشد ، بخصوص اگر G در این دستگاه مقدار شتاب ثقل باشد (G=۹,۸۱) واحدجرم عبارت ازجرم جسمی میشود کهوزنش ۹,۸۱ برابر واحد قوه باشد .

در سلسله اخیر چنانکه ملاحظه میشود واحد قوه و در نتیجه واحد جرم بانتخاب نقطه معین از سطح زمین بستگی پیدا میکند و بهمین جهت است که غالبا سلسله CGS را بآن ترجیح میدهند . ولی چون این اختلاف در مورد اعمال صنعتی محسوس نیست یعنی تغییرات G خیلی قلیل است برایسهولت بیشتر سلسله .M.S.KF درعملیات جر اثقالی مورد استعمال دارد

تمرینات

۱ - شتاب ثقل g در پای برج ایفل معین است مقصود محاسبه شتاب است دربالای برج بفرض آنکه بدانیم شتابهای ثقل در دو نقطه واقع بر یك قائم به نسبت معکوس مجذورات فواصل آنها ازمرکز زمین است مثال عددي : $g=۹۸۱$ درسلسله CGS و مقدار تقریبی شعاع زمین ٦٣٦٦ کیلومتر است

۲ - فرض میکنیم δ مقدار زاویه بین قائم مکان وشعاع زمین درهمینمکان باشد معین کنید برای کدام یك از مدارات ارضی اینزاویه ماکزیموم است ، زمین را بشکل کرهٔ حقیقی فرض مینمائیم و g را درمعدل النهار برابر ۹۷۸ اختیار میکنیم (درسلسلهٔ CGS) با همین مفروضات g را برای نقطهٔ M که شعاع آن بامعدل النهار زاویه ٤٥^{0} ایجاد مینماید حساب کنید

۳ - میدانیم که در سلسلهٔ CGS مقدار شتاب ثقل در پاریس ۹۸۱ است مقصود تعیین مقدار این شتاب است وقتی که آحاد طول و زمان میلیمتر ودقیقه شود

۴ - وزنه p بمنتهای طنابی که میتواند بالا وپائین برودآویختهشده بقسمیکهمیتوان بآن هر یك از دونوع حرکت را وارد ساخت . طناب قابل انعطاف ولی غیر قابل تغییر است و جرم آن غیر قابل ملاحظه میباشد ، مقاومت هوارا نیز صفر فرض مینمائیم
چه حرکتی باید بوزنه p داد تا کشش طناب همواره اولا باوزن p مساوی باشد ثانیا دو برابر وزن p شود ثالثا نصف وزن p گردد رابعا مساوی صفر شود

۵ ـ با چه سرعتی نقطه وزینی را باید بطور افقی رها کرد برای اینکه بزمین نیفتد و دور زمین بگردد بفرض‌آنکه اولا ۹۸۱=g در سلسله CGS ثانیا شعاع زمین ۶۳۶۶ کیلومتر باشد مقدار سرعت را بحسب متر در ثانیه حساب کنید.

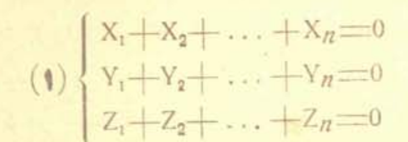
فصل دوم

استاتیك نقطه

استاتیك نقطه آزاد

۲۴ ـ تعادل نقطه مادی ـ قبلا ثابت کردیم که شرط لازم و کافی برای آنکه نقطه مادی که در زمان t_0 سرعتش صفر است، از زمان t تا زمان t_1 بحال تعادل باقی بماند این است که منتجه قوائی که بر آن اثر مینماید همواره بین دو زمان مزبور برابر صفر باشد.

برای آنکه شرائط مذکور را بطور تحلیلی بیان نمائیم سه محور متعامد ox و oy و oz را اختیار مینمائیم. فرض میکنیم (F_1) و (F_2) و ... و (F_n) قوائی باشند که بر نقطه مفروض M وارد شده اند؛ تصاویر قوه F_i را بر محورهای مختصات X_i و Y_i و Z_i فرض میکنیم برای آنکه منتجه قوای مزبور صفر باشد لازم و کافی است که مقادیر جبری تصاویر آن برمحورها صفر گردد یعنی:



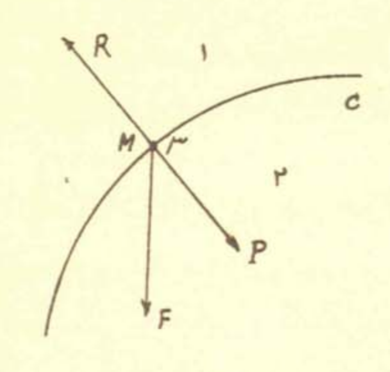
$$(۱)\begin{cases} X_1+X_2+\ldots+X_n=0 \\ Y_1+Y_2+\ldots+Y_n=0 \\ Z_1+Z_2+\ldots+Z_n=0 \end{cases}$$

در حالت مخصوصی که جمع قوای وارده در یك صفحه واقع باشند شرائط مزبور بدو شرط اول منجر میگردد بعبارة اخری شرط تعادل نقطه این است که مجموع مقادیر جبری تصاویر قوی بر دو محور عمود برهم برابر صفر باشد

تعادل نقطه مادی که باید بر منحنی ثابتی متکی باشد.

۲۵ ـ عکس‌العمل منحنی. فشار نقطه بر منحنی ـ فرض میکنیم نقطه مادی M بخواهد همواره بر منحنی ثابت C باقی بماند، این نقطه تحت اثر قوائی است که منتجه آنهارا F اختیار کرده ایم؛ این نقطه درنقطه μ با منحنی تماس دارد، عمل منحنی بر نقطه M بوسیله نقطه μ واردمیگردد این قوهٔ است مانند R که آنرا عکس العمل منحنی بر نقطه M مینامیم میتوان نقطه M را آزاد فرض نموده و بجای منحنی C قوهٔ R را قرار داد بنا بر این نقطه M تحت اثر دو قوه F و R واقع خواهد بود.

بنا بر اصل تساوی عمل و عکس‌العمل نقطه M بر نقطه μ قوهٔ مانند P وارد میسازد که متقابل با قوه R است این قوه عبارت از فشار M برمنحنی‌است برای آنکه نقطه برمنحنی C متکی باقی بماند میتوان لولهٔ فلزی بشکل‌منحنی ساخته ونقطه M را داخل آن اختیار نمود،



ص ۱۳

یا آنکه رشته فلزی نازکی منحنی شکل اختیار نموده، نقطه M را مانند حلقهٔ کوچکی فرض کرد که رشته فلزی درون آن قرار داشته باشد.

اما غالبا در عمل نقطه M را بر منحنی که دارای فرو رفتگی است قرار میدهند. اگر منحنی C مستوی باشد صفحه را بدو قسمت ۱ و ۲ قسمت مینماید بقسمیکه میتوان F یعنی منتجه قوای وارده بر M را در این صفحه

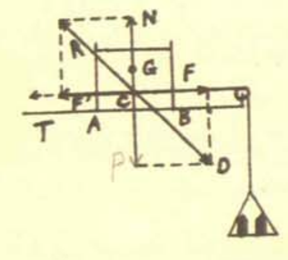
اختیار نمود . اگر نقطه M بحال تعادل باشد قوهٔ F متقابل با عکس العمل R از منحنی خواهد بود هرگاه نقطه M دارای حرکت باشد شتابش در صفحه مسیر C قرار دارد ، حامل $(m\gamma)$ نیز در همین صفحه است . اما حامل $(m\gamma)$ منتجه قوای F و R است از اینجا نتیجه میشودکه R نیز در همین صفحه‌است در هر دو حالت فشار P از M بر منحنی در صفحه واقع میباشد . زیرا این فشــار متقابل با R است . برای آنکه نقطه M از منحنی مسیر جدا نشود باید این فشار بقسمی متوجه باشدکه نقطه برمنحنی بچسبد بعبارهٔ اخری باید قوه R بطرف ناحیه ۱ متوجه باشد . اکر مثلا در ضمن حرکتی این شرائط مفقود شوند نقطه از منحنی جدا میگردد و پس از آن حرکتش مانند حرکت نقطه مادی آزاد میشود که تنها تحت اثر قوائی است که منتجه آنها R اختیار شده .

۳٦ - قوانین تجربی اصطکاك و لغزش - در اواخر قرن هیجدهم کولن تجاربی برای تعیین امتداد عکس العمل R نموده از اینقرار :

صندوقی که قسمت فوقانی آن بار است بر میز افقی AB قرار میدهند ، هنگامیکه صندوق بر میز بطور عادی قرار دارد وزن نقاط مادی مختلفی که مجموعا مشکل صندوق واشیاء واقع در آن میباشند بانضمام عکس العملهای نقاط تماس نیز تشکیل دستگــاهی معادل با صفر میدهند . حاملهای نمایش اوزان در امتداد قائم میباشند ، این حاملها معادل با یك حامل واحد اند که میتوان مبداء آن را مرکز حاملهای مزبور اختیار نمود ، نقطه G همان نقطه ایست که آنرا مرکز ثقل مجموعه صندوق و اشیاء واقع در آن میگویند ، بقسمی که اگر P نمایش این حامل واحد باشد عبارت از وزن مجموعه مزبور خواهد بود .

حاملهائی که نمــایش عکس العملهــای میز هستند باید با P تشکــیل دستگاهی معادل با صفر بدهند ، از اینجا نتیجه میشود که منتجه انتقــالی آنها

نسبت به نقطه G حاملی مانند N متقابل با P است بقسمیکه عزم مجموعش نسبت به G صفر باشد ، بعبارهٔ اخری حامل های نمایش عکس العمل تشکیل حامل واحدی مانند N میدهند این حامل نمایش عکس العمل میز است و این قوه قائم بر میز است .



س ١٤

حال بر صندوق قوهٔ F را بموازات میز وارد میسازیم بقسمیکه امتداد آن با امتداد P متلاقی باشد . کولن این قوه را بوسیله وزنه هائی که در کفه قرار داده شده و بوسیله قرقرهٔ به طنابی آویخته شده بود وارد میساخت . اگر عکس العمل بحالت قائم بر میز باقی بماند . کمترین قوه F محرك لغزش صندوق میگردد زیرا دستگاه قوای P و F و عکس العمل قائم نمیتوانند تشکیل دستگــاهی معادل با صفر بدهند ، امــا مشاهده میشود مادام کـه F از حدی مانند Q متجاوز نشده صندوق لغزش نمی نماید ؛ فرض میکنیم این شرط بر قرار باشد .

صندوق تحت اثر قوه F و وزن P و عکس العمل R بحال تعادل است عکس العمل R باید بصورت حاملی متقابل با منتجه حاملهای F و P یعنی CD باشد که مبداء آن محل تلاقی محملهای F و P است .

R را منتجهٔ دو قوه N قائم بر میز و F' بموازات میز اختیار مینمائیم از تقارن حاملهای R و CD نسبت به C معلوم میشود کـه $F'=F$ و $N=P$ چنانچه F ترقی نماید مادام که از حد خود Q متجاوز نشده قوهٔ R همین مولفه ها را حفظ خواهد نمود اما امتدادش با قائم زاویهٔ ایجاد میکند کـه بتدریج زیاد میگردد . پس نتایج تجارب کولن چنین میشود

۱ - حد Q به وسعت سطوح اصطکاك بستگی ندارد

۲ - حد Q به نوع مواد نقاط تماس بستگی دارد

ج ـ حد Q متناسب بافشار قائمی است که بوسیله جسم وارد میگردد

بطور خلاصه نسبت $\frac{Q}{P}$ عبارت از ضریبی مانند f است که فقط به طبیعت سطوح تماس بستگی دارد و آنرا ضریب اصطکاك لغزش از موقع حرکت میخوانند .

حال فرض میکنیم قوه F از Q تجاوز کند جسم بحرکت در میاید و بتجربه ثابت میشود که نسبت $\frac{F'}{P}$ همواره برابر ضریب f' باقی خواهد ماند که بسرعت حرکت بستگی نداشته بلکه تابع نوع سطوح تماس است و بوسعت آنها بستگی ندارد ، f' ضریب اصطکاك لغزش در موقع حرکت است و مقدار آن مختصری کمتر از ضریب اصطکاك لغزش ازموقع حرکت است

قوانینی که مذکور افتاد کاملا دقیق نیستند مگر بین بعضی حدود فشار و سرعت . مثلا اگر سرعت دارای مقدار قابل ملاحظه شود مقدار f' تنزل مینماید .

بعلاوه درصنعت سطوح اصطکاكرا بکمك اندود ازقبیل چربیهای نباتی و حیوانی و امثال آنها تخفیف میدهند؛ سطوح اندودشده کمتر تابع قانون کولن میباشند .

۳۷ ـ تعادل نقطهٔ که متکی بر منحنی ثابتی بوده و میتواند بر آن بدون اصطکاك بلغزد ـ بنا بر تعریف گویند نقطه میتواند بدون اصطکاك بر منحنی بلغزد اگر عکس‌العمل منحنی بر آن قائم باشد .

برای آنکه نقطه M که بر منحنی بدون اصطکاك دارای لغزش است تحت تاثیر قوای واردهٔ بدان بحال تعادل باشد باید منتجه قوای مزبور یعنی F متقابل با عکس العمل منحنی شود **بنا براین لازم است که قوهٔ F نیز مانندعکس‌العمل ، قائم برمنحنی شود .**

کافی بودن شرط مزبور را قبول میکنیم باینمعنی که اگر این شرط بر قرار باشد منحنی دارای عکس العملی متقابل با منتجه قوی یعنی F خواهد بود در حالی که نقطه بتواند از منحنی جدا شود بعلاوه باید فشار وارده از نقطه بر منحنی یعنی قوهٔ که بهمان صورت F نموده میشود بقسمی ممتد باشد

که نقطه را بر منحنی بچسباند .

۳۸ ـ تعادل نقطه که متکی برمنحنی ثابتی بوده وبر ان میتواند دارای لغزش با اصطکاك باشد ـ از قوانین تجربی کولن چنین مستفاد میشود که **شرط لازم و کافی برای تعادل نقطهٔ که بر منحنی ثابتی متکی بوده و بر آن میتواند دارای لغزش با اصطکاك باشد این است که نسبت مولفهٔ مماسی منتجهٔ قوای وارده بدان به مولفهٔ قائم همین منتجه کمتر یامساوی ضریب اصطکاك لغزش نقطه بر منحنی باشد**

اگر F منتجه قوای واردهٔ بر M باشد که بر منحنی C متکی است در وضع P از نقطه M قوه F را بدو قوه F_t که بر مماس مرسوم از نقطه P بر منحنی واقع است و F_n که بر قائم همین نقطه قرار دارد تجزیه مینمائیم . و آنها را مولفه های مماس و قائم قوه F میخوانیم . هر گاه f ضریب اصطکاك موقع عزیمت باشد شرط تعادل نقطه M از نامساوی ذیل معین میگردد

$$(1) \quad F_t \leq f.F_n$$

φ را زاویهٔ حاده فرض میکنیم که ظلش برابر f باشد و این همان زاویه ایست که به زاویه اصطکاك درموقع عزیمت موسوم است ؛ α را زاویهٔ حاده F با مماس درنقطه P اختیار مینمائیم از مثلث قائم الزاویه PAB حاصل میشود $\cot\alpha = \frac{F_t}{AB}$ و چون $AB = F_n$ پس رابطهٔ (۱) بدین صورت در میاید $\cot\alpha \leq tg\varphi$ زوایای α و φ حاده اند پس از این نامساوی حاصل میشود

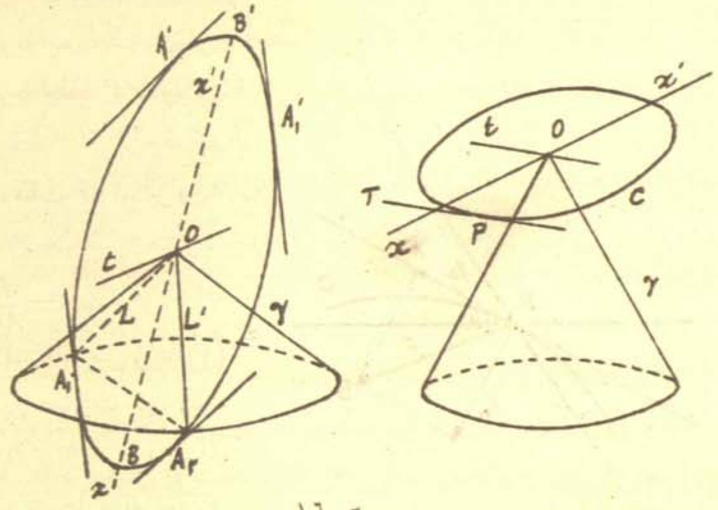
س ۱۵

$\frac{\pi}{2} - \alpha \leq \varphi$ و یا $\alpha \geqslant \frac{\pi}{2} - \varphi$

از این نا مساوی حاصل میشود کـه امتداد قوه F باید خارج مخروط دواری باشد که راسش P و محورش مماس این نقطه بر منحنی ومولدش با محور زاویهٔ اصطـکـاك را ایجاد مینمایند . و وقتی نقطه بقسمی باشد که $F_t = fF_n$ و یا $\alpha = \frac{\pi}{2} - \varphi$ کویند نقطه درحال حد تعادل است ، چنانچه F_t کمی از fF_n تجاوز کـند یعنی α کمتر از $\frac{\pi}{2} - \varphi$ شود M بحـرکت در میاید وجهت حرکت موافق جهت مولفه مماسی قوه F است .

مثال ـ اوضاع تعادل نقطه مادی را بر دائرهٔ که بر آن نقطه متکی بوده ودارای لغزش واصطکاك است تعیین کنید .

فرض میکـنیم O مرکز دائره بوده و صفحه آن با صفحه افق زاویه قائمه یا حاده ایجاد نماید و i مقدار این زاویه باشد ، φ را زاویهٔ اصطـکاك نقطه برمحیط دایره اختیار مینمائیم و p را وزن نقطه فرض میکـنیم .



س ۱٦

برای آنکـه تعادل برقرار کردد لازم و کافی است کـه مماس بر دائره

درنقطه P (یکی از اوضاع تعادل) باقائم زاویه ایجاد میکند که بیشتر یامساوی متمم زاویه φ باشد بهتر آنست تحقیق کنیم که مماس PT خارج مخروط دواری واقع شود که بمحور قائم بوده و زاویه مولدش با محور برابر $\frac{\pi}{2} - \varphi$ باشد .

یاآنکه اگر ازنقطه O خط Ot رابموازات مماس PT رسم کنیم Ot بایدخارج مخروط دواری که راسش O و مولدش با محور قائم زاویه برابر متمم φ احداث مینماید واقع کردد .

بنا بر وضع خط Ox یعنی بزرکترین شیب صفحه دائره چند حالت تشخیص میدهیم .

ا ـ $i < \varphi$ در اینصورت Ox خارج مخروط γ خواهد بود بازاء جمیع اوضاع P خط Ot خارج مخروط γ خواهد بود . **جمیع نقـاط دائره اوضاع تعادل نقطه اند .**

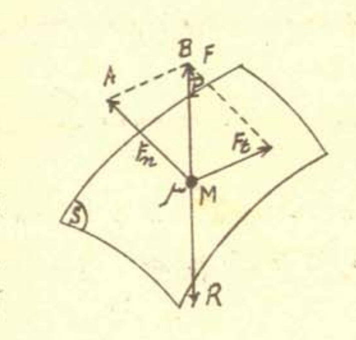
ب ـ $i > \varphi$ دراینحال Ox داخل مخروط γ است صفحه مایل مخروط γ را در دو خط oL و oL' قطع مینماید . P وقتی بوضع تعادل است که Ot نسبت باین دو خط در همانزاویه که Ox قرار دارد واقع نباشد . نقاط تماس مماسهای متوازی با خطوط L و L' قوسهـای A_1BA_2 و $A'_1B'A'_2$ را معین مینماید ، جمیع نقاط این قوسها اوضاع تعادل نقطه و منتهای آنها اوضاع حد تعادل میباشند .

ج ـ $i = \varphi$ ، در اینحال مخروط γ با صفحه دائره در Ox متماس است جمیع نقاط دائره اوضاع تعادل اند ودو سر قطر افقی از دایره حدتعادل میباشند

اکر نقطه M دارای حرکت بدون اصطـکاك باشد اوضاع تعادل آن بر دائره نقاط B و B' خواهد بود . چنانچه نقطه متحرك در B باشد و آنرا کمی از اینحالت منحرف نمائیم مولفه مماسی وزن نقطه مجددا آنرا بوضع B عودت میدهد واینحالت از تعادل را **پایدار** مینامند وبهمین طریق معلوم میشود که تعادل نقطهٔ B' **ناپایدار** است .

تعادل نقطه مادی متکی بر سطح ثابت

۲۹ ـ عکس‌العمل سطح . فشار نقطه بر سطح ـ فرض میکنیم M نقطه مادی باشد که بر سطح ثابت S متکی است و F را منتجه قوای وارده بدان اختیار مینمائیم ، نقطه M در نقطه μ با سطح S تماس دارد و بواسطه همین نقطه است که عمل سطح به‌نقطه وارد میگردد ، عمل‌مزبور قوهٔ مانند R است که آنرا عکس‌العمل سطح میخوانیم ، میتوان نقطه M را آزاد دانست بشرط آنکه قوهٔ R را نیز بقوای مفروض اضافه نمائیم .



س ۱۷

بنا بر اصل تساوی عمل و عکس‌العمل نقطه M بر نقطه μ قوهٔ P را که متقابل R است وارد میسازد ، این قوه همان فشار P برسطح S است .

برای آنکه نقطه بر سطح باقی بماند میتوان آنرا مابین دو سطح بینهایت نزدیك بهم اختیار کرد ولی غالبا درعمل نقطه را بطور عادی برسطح قرار میدهند و برای آنکه بر آن باقی بماند باید فشار P بقسمی ممتد باشد که نقطه را برسطح بچسباند یا بعبارهٔ دیگر باید عکس‌العمل R در جهتی که نقطه بر سطح گذاشته شده ممتد باشد . هنگامیکه در نتیجه حرکت نقطه شرط مزبور مفقود گردد نقطه از سطح جدا شده آزاد میگردد ،

۳۰ ـ تعادل نقطهٔ واقع بر سطح بنا بر آنکه بتواند بر آن دارای لغزش بدون اصطکاك باشد ـ بنابر تعریف گویند نقطه میتواند لغزش بدون اصطکاك داشته باشد هرگاه عکس‌العمل سطح قائم برآن باشد . وقتی چنین باشد برای آنکه نقطه P از سطح یکی از اوضاع تعادل M

باشد لازم استکه منتجه قوای مفروض یعنی F هنگامیکه نقطه M بر P واقع است متقابل با عکس‌العمل سطح باشد **یعنی قوه F قائم بر سطح گردد** کافی بودن شرط فوق را قبول میکنیم باینمعنی که اگر شرط مزبور مقرر باشد ، سطح عکس‌العملی متقابل با منتجه F بروز میدهد .

در حالتیکه نقطه بطور عادی بر سطح گذاشته شود باید فشار نقطه M یعنی همان قوه که بصورت حامل F نموده میشود بقسمی باشد که نقطه را بر سطح بچسباند .

۳۱ ـ تعادل نقطه واقع بر سطح بنابر آنکه بتواند بر آن دارای لغزش با اصطکاك باشد ـ از قوانین تجربی کولن چنین نتیجه میگردد: **شرط لازم و کافی برای تعادل نقطه واقع بر سطح بنا بر آنکه بر آن دارای لغزش با اصطکاك باشد این است که نسبت مؤلفه مماسی منتجه قوای وارده بر نقطه به مؤلفهٔ قائم همین منتجه کمتر یا مساوی ضریب اصطکاك لغزش نقطه بر سطح باشد .**

فرض میکنیم نقطه M بر نقطه μ از سطح قرار داشته باشد (س ۱۷) و F منتجه قوائی باشد که بر آن وارد میگردند . F_n را تصویر F بر قائم نقطه μ از سطح اختیار مینمائیم میتوان F را منتجه F_n و قوهٔ دیگری همسنگ AB فرض نمود و این قوه ایست که در صفحه مماس بر سطح از نقطه μ واقع است ، F_n و F_t مولفه های قائم و مماس F میباشند . شرط تعادل از **نامساوی**

$$(۱)\quad F_t \leq f F_n.$$

معین میشود ، f ضریب اصطکاك لغزش موقع عزیمت میباشد .

α را زاویه حاده $F\mu A$ فرض میکنیم یعنی همان زاویهٔ که F با قائم μ ایجاد مینماید ، مثلث $F\mu A$ قائم‌الزاویه است پس $tg\alpha = \frac{F_t}{F_n}$ چون بجای f ظل زاویهٔ φ را قرار دهیم نامساوی (۱) بدین شکل درمیاید .

$$(۲)\quad \alpha \leq \varphi$$

ازاین نامساوی معلوم میگردد که محمل حامل F داخل مخروط دواری که راسش μ و محورش قائم برسطح از همین نقطه بوده و زاویهٔ مولدش با محور مساوی زاویهٔ اصطکاك است .

تبصره . همانگونه که در تعادل نقطه بر منحنی ذکر شد در اینجا نیز میتوان شرط تعادل نقطه را بر سطحی بدون اصطکاك تعیین نمود .

۳۲. آثار واسباب‌اصطکاك . اصطکاك اسبابهای یك ماشین باعث استعمال موادمشکله آنها میگردد ، بوسیله صیقلی‌ساختن سطوح اسبابها میتوان تا اندازهٔ از مقدار اصطکاك کاست ، علاوه بر این مقداری از قوه محرك ماشین باید صرف تقابل با اصطکاك گردد ، بهمین سبب اسبابها در نتیجه اثر قوای وارده دارای حرارتی شده و انبساط آنها باعث عدم استحکام ماشین میگردد ؛ یك قسمت عمده از قوه محرك بوسیله مقاومت اثاثیه ماشین از بین میرود ، تنها بقیه قوه مزبور است که مورد استعمال پیدا میکند .

معذلك اصطکاك بعضی اوقات دارای آثار مفیده است . مثلا بسبب اصطکاك است که ما میتوانیم بر زمین راه برویم ، بدون اصطکاك نمیتوانیم هیچ شیئی را در دست بگیریم ، یا پیچی را در تخته بپیچانیم ، تسمه های ماشین ها بوسیلهٔ اصطکاك فلکه ها را بحرکت در میاورند ، خاصیت ترمز از نتایج مستقیم اصطکاك است .

چون بوسیله صیقلی کردن سطوح میتوان از مقدار اصطکاك کاست معلوم میشود یکی از اسباب اصطکاك خشونت سطوح تماس دوجسم‌است بعلاوه برای از بین بردن اصطکاك باید سطوح تماس هر یك از دوجسم را جداگانه صیقلی کرد .

تمرینات

۶ . دوقوهٔ ۲۴۳ کیلوگرمی بریك نقطه اثر نموده‌اند زاویه بین‌قوی برابر $۱۲۷^\circ۳۹'$ است مقصود تعیین مقدار قوه‌ایست که باید بر نقطه وارد شود تابحال تعادل باقی بماند

۷ . سه نقطه Aو Bو C واقع بریك استقامت مفروض‌اند نقطه C مابین Aو B قرار دارد فاصله ABبرابر ۱۰ متر است و BC مساوی ۲۰ متر ، از نقطه B خط BD را چنان رسم مینمائیم که با BC زاویهٔ ۶۰° ایجاد نماید از نقطه C عمود CD را بر خط BD فرود میاوریم وخط AD را رسم‌مینمائیم ، اولا برنقطه D درامتدادBDقوهٔ برابر ۱۰۰۰ کیلوگرم وارد شده مقصود تعیین قوای Pو Q است که در امتداد DAو DC واردشوند بقسمی که نقطه D بحال تعادل باشد ، ثانیا اگر زاویه BDC غیر مشخص باشد مقدار اینزاویه را بقسمی تعیین کنید که قوه Q کوچکترین مقادیر ممکنه را دارا گردد

۸ . بر نقطه A در یك صفحه قوای ABو ACو ADو AEو AF وارد شده مقادیرآنها بترتیب $۲\sqrt{۳}$ و ۴ و ۵ و ۷ و ۲ میباشد امتداد قوی بوسیله تساوی های $(AB,BC)=۴۵^\circ$ و $(AB,AD)=۱۳۵^\circ$ و $(AB,AE)=۲۲۵^\circ$ و $(AB,AF)=۳۱۵^\circ$ معین گردیده ثابت کنید نقطه A بحال تعادل است

۹ . نقطه بوسیله سه‌قوه مساوي مفروض جذب‌شده ، وضع تعادل آنرا تعیین کنید

۱۰ . نقطه M مجذوب روس مثلثی است مقدار قواي مزبور kAB و kAC و kBC میباشند مقصود تعیین وضع تعادل نقطه است

۱۱ . سه رشته قابل ارتجاع از یك ماده با یك مقطع بوسیله یکی از انتهایشان بروس مثلثی بسته شده اند رشته هارا بوسیله سه انتهاي دیگرشان بیکدیگر گره زده اند . طول اولیه رشته ها باید بچه نسبتی باشد تا وضع تعادل گره بر نقطه تلاقی میانه های مثلث باشد بفرض آنکه بدانیم کشش رشته متناسب با افزایش طول آن به واحد طول است بدینمعنی که مقدارش برابر $k\frac{x-l}{l}$ ، k مقداری ثابت و l طول اولیه‌رشته و x طول آن پس از کشش است

۱۲ . نقطه M تحت تاثیرنقاط A_1 و A_2 و ... و A_n با قوائی که بصورت حاملهای $m_1(MA_1)$ و $m_2(MA_2)$ و ... و $m_n(MA_n)$ اند قرار دارد ، m_1 و m_2 و ... و m_n ضرایب مفروضی میباشند بعلاوه نقطه M تحت اثر قوه دیگری که از حیث کمیت و امتداد ثابت است واقع میباشد ، ثابت کنید همواره نقطه مانند G موجود است بقسمیکه منتجه قوای مفروض بصورت حامل μ(MG) نموده میشود ، μ ضریب غیر معینی‌است ، وضع تعادل نقطه M را تعیین نمائید

۱۳ . متحرکی بحرکت نوسانی ساده متحرك است مقصود تعیین قوه واحدی است بحسب میدان نوسان بقسمیکه قابل حصول حرکت مزبوره باشد

۱۴ . متحرکی بر سهمی که معادله اش $y^2=2px$ است تحت اثر قوه که بعرض نقطه اثر بستگی دارد سیر مینماید ، مقصود تعیین قوه مزبور است در حالات ذیل .

ا . تصویر نقطه بر محور دارای حرکت متشابه است ، **ب .** تصویر متحرك برمماس

راس دارای حرکت متشابه است ، **ج** ـ تصویر متحرك بر مماس راس دارای حرکت متشابه التغییر است ، **د** ـ تصویر نقطه متحرك برمماس راس دارای حرکت نوسانی ساده بمرکز راس منحنی است

۱۵ ـ نقطه داراي حرکتی مستقیم الخط است که سرعت v از آن تابعی معین ازطول متحرك بر مسیر است مقصود تعیین قوه است که قابلیت ایجاد چنین حرکتی داشته باشد
مثال : $v=kx$ و $v=k\sqrt{a^2 x^2}$ و $v=\sqrt{2gx}$ ، a و k و g مقادیر ثابته اند

۱۶ ـ مقدار قوه واحدی که باعث ایجاد حرکت مستدیر متشابه باشد تعیین نمائید

۱۷ ـ نقطه نسبت بمرکز بیضی معینی که معادله است $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=۱$ است متحرك میباشد حرکت نقطه بنا بر قانون مساحات صورت میگیرد

ا ـ مقصود محاسبه مختصات متحرك است بحسب زمان ، برای این منظور ملاحظه میکنیم که متناظر با هر نقطه از بیضی بمختصات x و y زاویه مانند α موجود است بقسمیکه $x=a\cos\alpha$ و $y=b\sin\alpha$ ، α را بحسب زمان حساب مینمائیم ، ثابت کنید اگر نقاط M و M′ از منحنی بقسمی باشند که OM′ بموازات سرعت M گردد بین سرعت مزبور و OM نسبت ثابتی بر قرار خواهد بود

ب ـ اگر بدانیم مقدار قوه که قابل ایجاد چنین حرکتی است تابع فاصله O متحرك است این تابع را تعیین کنید

۱۸ ـ متحرك M بیضی را تحت قانون مساحات نسبت بکانون F از منحنی سیر مینماید (حرکت سیارات) **ا** ـ ثابت کنید هودوگراف اینحرکت نسبت بقطب F′ دائره است که بواسطه حرکت دورانی دائره اصلی بیضی حول F′ بزاویه برابر یك قائمه حاصل شده

ب ـ قوه واحدی که قابلیت ایجاد چنین حرکت را داشته باشد دارای مقداری مساوی $\frac{k}{FM^2}$ است ، بنا بر آنکه k مقدارش ثابت و برابر $mA^2\frac{a}{b^2}$ باشد ، m جرم نقطه و A دو برابر سرعت سطحی و a و b نیمه های محورهاي اطول واقصر بیضی میباشند

۱۹ ـ هرگاه متحرکي بر بیضی ، هذلولی یا سهمی نسبت بیکی از دوکانون موافق قانون مساحات حرکت نماید هودوگراف حرکت F نسبت بهمین کانون دائره است ، دایره وقتی مسیر سهمی باشد بر این نقطه میگذرد

بالعکس اگر متحرکی تحت قانون مساحات نسبت به نقطه F حرکت نماید و هودگراف حرکت متشابه نسبت به قطب F دایره باشد مسیر متحرك بیضی یاهذلولی است که کانون آنها F است بنا بر آنکه دایره بر نقطه F نگذرد و در غیر اینصورت مسیر سهمی است

۲۰ ـ چنانچه نقطه برسهمی تحت قانون مساحات نسبت بکانون F سیر نماید ، قوه واحدی

که قابلیت ایجاد اینحرکت را داشته باشد دارای مقداری مساوی $\frac{k}{FM^2}$ است ، k مقدارش ثابت ومساوی $m\frac{A^2}{p}$ میباشد بنا بر آنکه m جرم نقطه و A دو برابر سرعت سطحی Vitesse aréolaire و p نمایش پارامتر سهمی باشد

۲۱ ـ نقطه M بوزن p باید برقطعه خط AB که با افق زاویه $\alpha=BAX$ را ایجاد نموده متکی باشد بعلاوه این نقطه تحت تاثیر دو قوه افقی MF و MH که هر دو در صفحه قائم مار بر AB قرار دارند واقع میباشد ، دو قوه مزبور مختلف الجهة بوده و مقادیرشان بترتیب مساوي حاصلضربهای MA و MB درعددی مانند m است ، بفرض آنکه $AB=d$ مقصود تعیین فاصله MA است تا نقطه بحال تعادل قرار گیرد ، آیا تعادل پایدار است ، فشار وارد بر AB چقدر است

اگر بعلاوه فرض کنیم $\frac{p}{d}=\frac{MF}{MA}=m$ بین چه حدودی باید زاویه α واقع باشد تا مسئله ممکن گردد

۲۲ ـ نقطه بدون اصطکاك بر بیضی سیر میکند ، نقطه مزبور بواسطه دو قوه متناسب با اشعه حامل متناظر خود مجذوب دو کانون است ، در چه نقطه از منحنی باید متحرك M را بدون سرعت اولیه قرار داد تا بحال تعادل باشد

۲۳ ـ نقطه M در صفحه مثلث مفروضی تحت تاثیر قوای MA و MB و MC قرار دارد نقطه M باید بر خط مفروضی واقع در صفحه مثلث بدون اصطکاك قرار داشته باشد ، وضع تعادل این نقطه را تعیین کنید

۲۴ ـ بر خط افقی $X'X$ نقطه مادی M بوزن P میتواند لغزشی با اصطکاك داشته باشد ضریب اصطکاك برابر $tg\varphi$ است ، نقطه مزبور بوسیله نقطه که فوق $X'X$ در صفحه قایم مار بر این خط واقع شده جذب میگردد ، قوه جاذبه برابر $2P$ است زاویه بین $X'X$ و MA را α اختیار مینماییم ،

بنا بر آنکه نقطه M بدون سرعت اولیه رها شده باشد مقصود تعیین رابطهٔ بین α و φ است برای آنکه M بحال سکون باقی بماند ، اگر حرکت موجود است معلوم کنید M بدوا فوق $X'X$ است یا بر این خط لغزش مینماید

۲۵ ـ نقطه M بوزن p باید بر سهمی که محورش قائم است بدون اصطکاك حرکت نماید این نقطه با قوه متناسب با شعاع حامل MF دفع میگردد ، وضع تعادل نقطه M را تعیین کنید ، عکس العمل منحنی را مشخص سازید . بفرض آنکه تقعر منحنی بطرف بالا باشد — نقطه وزین باید بر سهمی که محورش قائم و راسش بطرف بالا است واقع باشد ، بعلاوه این نقطه بواسطه نقطه ازمحور متناسب با فاصله اش از محور جذب میگردد ، اوضاع تعادل نقطه را تعیین کنید ، اصطکاك را حساب نمینمائیم

۲٦ ـ نقطه‌مادی وزین بجرم m باید داخل نیمدایره واقع در صفحهٔ قائم که قطر AB از آن افقیه است باقی بماند ، قوه ثابت F مجذوب نقطه A است ،

ا ـ وضع تعادل نقطه M را تعیین کنید ،

ب ـ عکس‌العمل دایره چقدر است

مثال عددی ـ $m=۱۸$ و $g=۹۸۰$ در سلسله CGS و $F=۱$

۲۷ ـ نقطهٔ وزین میتواند با اصطکاك بر پیچی بمحور افقی سیر کند اوضاع تعادل نقطه را تعیین کنید

۲۸ ـ نقطه مادي وزین M باید بدون اصطکاك بر محیط دایره واقع در صفحه قائم سیر نماید ؛ این نقطه مجذوب نقطه A منتهاي قطر افقی دایره است مقدار قوه متناسب با فاصله MA است ، اوضاع تعادل نقطه M را تعیین نموده عکس العمل دایره را حساب کنید

۲۹ ـ نقطه وزین M بر منحنی معادله $xy=k$ است قرار دارد محور yy' قائم است مقدار قوه افقی را تعیین کنید که نقطه همه جا بحال تعادل باشد ، اصطکاك موجود نیست

۳۰ ـ میدانیم سطح آزاد مایعی در حال حرکت بدین طریق تعیین میگردد که اگر مایع را منجمد سازیم و نقطه مادی وزینی را در نقطه غیر مشخصي از سطح آزاد مزبور قرار دهیم بقسمی که با جسم حاصل در حرکت باشد این نقطه نسبت بجسم حاصل بحال تعادل باقی بماند

مقصود تعیین سطح آزاد مایع در ظرف استوانه شکل است بنا بر آنکه حول محور قائم استوانه در حرکت باشد ، مقدار جرم مایع خارج شده از ظرف را وقتی سرعت زاویه مقدار مفروضی است حساب کنید بنا بر آنکه قبل از حرکت ظرف از مایع پر باشد

۳۱ ـ نقطه مادی باید بر صفحه که بزرگترین شیب آن AB است بحال تعادل باشد ، قوای وارده به نقطه عبارتند از وزن p وسه قوه F و F′ و F″ ، مقدار سه قوه اخیر سه برابر p است و محملهای آنها بترتیب افقیه و قائم و BA است (س ۱۸)

ا ـ زاویه صفحه‌را با افق تعیین کنید **ب** ـ فشار بر صفحه را مشخص سازید ، اصطکاك صفر است

س ۱۸

۳۲ ـ دو قوه مفروض F و F′ بترتیب بموازات صفحه افق و خط بزرگترین شیب صفحهٔ مایل بمیل i میباشند (i نامعلوم است) قوای مزبور متوالیا بر نقطه مادي وزینی که بر صفحهٔ واقع بوده و میتواند بر آن بدون اصطکاك بلغزد وارد میگردند ، مقصود تعیین وزن P نقطه است برای آنکه در دو حالت بوضع تعادل قرار گیرد ، میل صفحه

چقدر است ، مقدار نسبت $\frac{F}{F'}$ را بقسمی تعیین کنید که زاویهٔ صفحه با افق ٤٥^{0} باشد

۳۳ ـ بر صفحه افقی ثابتی نقطه M بوزن p مجذوب نقطه O واقع در تحت صفحه بفاصله a میباشد قوه جاذبه برابر $\frac{k}{OM}$ است ؛ k عدد مثبت مفروضی است ؛ مقصود تعیین اوضاع تعادل نقطه است ؛ ضریب اصطکاك را f اختیار کنید

مثال عددی : $f=۰,۳۲$ و $k=۱٤$ (CGS) ؛

۳٤ ـ نقطه مادی وزینی برصفحه افقی ثابتی قرار دارد ، نقطه برشته قابل ارتجاعی بسته شده سر دیگر رشته بر صفحه ثابت شده است ، فرض میکنیم کشش رشته متناسب با افزایش طول آن باشد ، اوضاع تعادل نقطه را بفرض آنکه بتواند بااصطکاك برصفحه بلغزد تعیین کنید

۳۵ ـ در صفحه قائمی Ox و نقطه A بر آن بفاصله a از O قرار دارد ، شعاعی OD فوق Ox بقسمی است که $(Ox,OD)=\frac{\pi}{٤}$ حلقه M بوزن p بر D میلغزد این حلقه باقوه kMA مجذوب نقطه A است

ا ـ ثابت کنید که حلقه بر خط D تغییر مکان میدهد و منتجه قواي مفروض وارد بدان بر خطی است که بر نقطه ثابتی مرور مینماید

ب ـ ضریب اصطکاك حلقه بر D برابر f است ؛ حلقه را باید بر چه قسمت از خط D قرار دارد تا بحال تعادل قرار گیرد

۳٦ ـ دو محور متعامد $x'Ox$ و $y'Oy$ و دو نقطه A و A' بر $x'x$ بفاصله a ازمبداء قرار دارند . نقطه M از صفحه از نقاط A و A' بفواصل r و r' واقع میباشد بر این نقطه قوای F و F' با کمیات $\frac{(MA)}{AM^2-a^2}$ و $\frac{(MA')}{a^2-A'M^2}$ وارد شده اند

ا ـ اگر P محل تلاقی $x'x$ و خط اثر (Ligne d'action) منتجه این قوی باشد ؛ مقصود محاسبهٔ نسبت $\frac{PA}{PA'}$ و طول نقطه P است ، از این قسمت نتیجه بگیرید که PM=PO واینکه منتجه برنقطه M مماس‌بردایره است که در نقطه O بر Ox مماس‌است

ب ـ نقطه M بعلاوه باید برخطی که با Oy زاویه a را ایجاد نموده بدون‌اصطکاك تغییر مکان دهد خط اخیر Oy را در نقطه بعرض b قطع نموده ، اوضاع تعادل نقطه M را بر این خط تعیین نمائید .

فصل سوم

دینامیك نقطه

۳۳ - اثر **قوه** وارد بر متحرکی در حرکت آن ایجاد **شتابی** مینماید بدینمعنی‌که **سرعت** متحرك را تغییر میدهد این اثر را ممکنست بوسیله **کارقوه** تشخیص داد.

دینامیك عبارت از یافتن روابطی است که بین کمیات قوه، شتاب، و کار موجود است.

دستور $(F)=(m\gamma)$ که رابطه بین قوه وشتاب است قبلا بدست آورده ایم، این دستور را پس از این در حل مسئله کلی معرفة القوی بکار میبریم و آن چنین است: **قوهٔ وارد برنقطه مادی مشخص است تعیین حرکت نقطه مطلوب است.**

مسئله فوق را فقط در حالتیکه قوه مفروض از حیث کمیت و جهت ثابت باشد حل میکنیم باین ترتیب که بدوا نقطه را آزاد، و پس از آن مجبور بلغزش بر منحنی یا سطح صیقلی یا غیر صیقلی اختیار مینمائیم.

مانند معرفةالحرکات باید مسیر و قوانین حرکت را معین ساخته بعد در آن بحث کنیم.

۱ - حرکت نقطه مادی آزاد

۳۴ - حرکت موافق امتداد قائم - درلحظه $t=0$ متحرك M بجرم m درخلاء پرتاب شده مبدأ طول نقطه O، سرعت اولیه v_0 و امتداد مسیر موافق امتداد قائم نقطه O است. واضح است تنها قوهٔ که بر نقطه مفروض واردمیگردد وزن آن یعنی قوهٔ قائم و ثابت است، جهت مثبت را از تحت بفوق اختیار مینمائیم.

۱ - مسیر متحرك - سرعت اولیه در امتدادقائم $z'z$ از نقطه O میباشد

و شتاب $-g$ همواره بر همین امتداد باقی میماند، پس حرکت دائماً بر $z'z$ انجام میگیرد

۲ - قانون حرکت - ازمعادلهٔ اصلی $(F)=(m\gamma)$ چنین نتیجه میشود.

$$m\frac{d^2z}{dt^2}=-mg \quad \text{و یا} \quad \frac{d^2z}{dt^2}=-g \qquad (۱)$$

چون از رابطه (۱) دومرتبه تابع اولیه استخراج کنیم حاصل میگردد

$$v=\frac{dz}{dt}=-gt+C \;\; (۲) \quad \text{و} \quad z=-\frac{1}{2}gt^2+Ct+C' \;\; (۳)$$

C و C' مقادیر ثابت میباشندکه اکنون آنهارا تعیین مینمائیم مقادیر عددی معادلات (۲) و (۳)را در لحظه $t=O$ حساب میکنیم حاصل میشود:

$v_0=C$ و $z_0=C'$ اما چون $z_0=O$ پس $C'=O$

حالا کر در معادلات (۲) و (۳) بجای C و C' مقادیر عددی آنهارا قرار دهیم نتیجه میشود:

$$v=v_0-gt \;\; (۴) \quad \text{و} \quad z=v_0t-\frac{1}{2}gt^2 \;\; (۵)$$

میتوانیم سرعت‌را بحسب طول حساب‌نموده چنین بنویسیم

$$v=\pm\sqrt{v_0^2-2gz} \qquad (۶)$$

۳ - بحث حرکت - بدواً شتاب را ثابت اختیار مینمائیم‌بقسمیکه‌همواره‌حرکت **متشابه‌التغییرمسرعه** باشد

ا - متحرك بدون سرعت رها شده یا از فوق بتحت با سرعت پرتاب شده $v_0\leq 0$

از معادلات (٤) و (٥) معلوم میشود که دراینحال v و z منفی میباشند و مقدار آنها با t بینهایت ترقی مینماید پس متحرك با سرعت متصاعدی سقوط خواهد کرد یعنی دارای **حرکت متشابه التغییر مسرعه** است.

ب - متحرك از تحت بفوق پرتاب شده $v_0>0$

از معادله (٤) معلوم میشود که سرعت بدوا مثبت بوده یعنی حرکت

متشابه التغییر مبطئه است و پس ازآن بازاء $t_1=\frac{v_0}{g}$ در نقطه M_1 مساوی‌صفر گردیده‌و دراینموقع $OM_1=z_1=\frac{v_0^2}{2g}$ است‌بعدمنفی شده ومقدار آن بینهایت ترقی مینماید یعنی حرکت **متشابه التغییر ومسرعه** میشود .

از معادله (٦) معین میشود که متحرك در عبور خود از نقاط مسیر دارای سرعت های متساوی ولی مختلف‌العلامه است .

تبصره - درحالت‌مخصوصی‌که $v_0=0$ دستورهای فوق‌بدینصورت‌درمیاید

$$z=-\frac{1}{2}gt^2 \quad \text{و} \quad v=\sqrt{-2gz} \quad \text{و یا} \quad v=gt$$

٣٥ - حرکت سهمی شکل - در لحظه $t=0$ نقطه M بجرم m درخلاء پرتاب‌شده ، مبدأ حرکت O سرعت‌برابر v_0 بوده وامتداد آن با افق زاویهٔ برابر α بین °۰ و °۹۰ ایجاد مینماید .

١ - قانون حرکت - اوضاع متحرك را بر سه محور متعامد مار بر نقطه O معین میسازیم Oz در امتداد قائم متوجه بوده و سرعت اولیه v_0 در صفحه xOz قرار دارد xوyوz رامختصات نقطه M در لحظه t اختیار مینمائیم ، دراین لحظه تنها قوه که بآن وارد میگردد وزن آن $-mg$ است که بموازات Oz میباشد .

طرفین معادله $F=(m\gamma)$ را بر محورها تصویرمیکنیم معادلات ذیل نتیجه میگردد .

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=0 \quad \text{و} \quad m\frac{d^2y}{dt^2}=0 \quad \text{و} \quad m\frac{d^2z}{dt^2}=-mg \quad \text{و یا}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=0 \qquad \frac{d^2y}{dt^2}=0 \qquad \frac{d^2z}{dt^2}=-g \qquad (1)$$

از این معادلات معلوم میشود که تصویر حرکت نقطهٔ M بر محورهای Ox و Oy **متشابه** است . از طرف دیگر میتوان محورها را بقسمی اختیارکرد که تصویر v_0 بر محور Oy صفر باشد بقسمیکه متحرك نتواند از صفحه v_0Oz خارج‌گردد واین صفحه بوسیله امتدادقائم و امتدادسرعت اولیه مشخص‌است بنا بر این باید حرکت نقطه را در صفحه xOz تعیین نمائیم ، چون از

معادلات $\frac{d^2x}{dt^2}=0$ و $\frac{d^2z}{dt^2}=-g$ دو مرتبه استخراج تابع اولیه مینمائیم حاصل میگردد :

$$\frac{dx}{dt}=C \quad \text{و} \quad \frac{dz}{dt}=-gt+C_1 \qquad (2)$$

$$x=Ct+C' \quad \text{و} \quad z=-\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C'_1 \qquad (3)$$

حال مقادیر ثابته را محاسبه میکنیم ، در لحظه $t=0$ بنا بر شرائط اولیه متحرك چنین خواهیم داشت

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_0=v_0\cos\alpha \quad \text{و} \quad \left(\frac{dz}{dt}\right)_0=v_0\sin\alpha \quad x_0=z_0=0 \qquad (i)$$

در معادلات (٢) و (٣) t را برابر صفر اختیار مینمائیم نتیجه میشود

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_0=C \quad \text{و} \quad \left(\frac{dz}{dt}\right)_0=C_1 \qquad (2)_0$$

$$x_0=C' \quad \text{و} \quad z_0=C'_1 \qquad (3)_0$$

از معادلات فوق مقادیر ثابت تعیین میشوند از اینقرار :

$C=v_0\cos\alpha$ و $C_1=v_0\sin\alpha$ و $C'=C'_1=0$

س ٢٠

بدین طریق میتوان معادلات (٢) و (٣) را بصور ذیل نوشت :

تصاویر سرعت

$$\frac{dx}{dt}=v_0\cos\alpha \qquad (4)$$

$$\frac{dz}{dt}=-gt+v_0\sin\alpha \qquad (5)$$

تصاویر متحرك

$$x=v_0\cos\alpha . t \qquad (6)$$

$$z=-\frac{1}{2}gt^2+v_0\sin\alpha . t \qquad (7)$$

٢ - مسیر متحرك - ١ - معادله مسیر - بین دو معادلهٔ (٦) و (٧)

t را حذف میکنیم حاصل میشود $z=-\frac{1}{2}\frac{g}{v_0^2\cos^2 a}x^2+tga.x$

رابطهٔ مزبور معادلهٔ سهمی بمحور قائم است که بر مبداء میگذرد .

مختصات راس منحنی (نقطه ماکزیمم)
$$\begin{cases} x_1=\frac{v_0^2\sin a\cos a}{g} \\ z_1=\frac{v_0^2\sin^2 a}{2g} \end{cases}$$

ممیز $p=\frac{v_0^2\cos^2 a}{g}$

میدان هدف $OC=2OB$ و یا $OC=2x_1$.

۳ـ بحث درحرکت .

بحث در حرکت‌را بوسیله هودکراف مینمائیم . قطب هودکراف را نقطه O اختیارمیکنیم، مختصات منتهای V' چنین میشود :

$x'=\frac{dx}{dt}=v_0\cos a$ و

$z'=\frac{dz}{dt}=-gt+v_0\sin a$

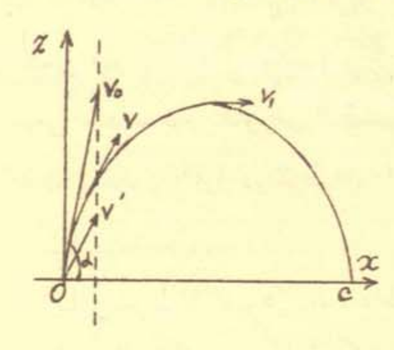
معادله‌اول $x'=v_0\cos a$ که به t بستگی ندارد

س ۲۱

معادله هودوکراف حرکت است و آن قائم V_0H است که بفاصله $v_0\cos a$ از محور Oz قرار دارد (س۲۲) ازمعادله $z'=-gt+v_0\sin a$ معلوم میشود که متحرك هودکراف دارای سرعت ثابت $-g$ است .

بسهولت میتوان بوسیله حرکت نقطهٔ V' تغییرات سرعت متحرك M را معین نمود ، مقدار این سرعت از لحظه $t=0$ تا لحظـه $t_1=\frac{v_0\sin a}{g}$ که

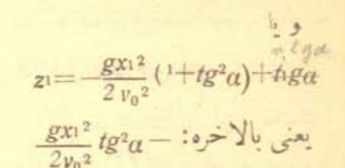
متحرك بر نقطه A واصل میگردد نزول مینماید یعنی در این فاصله از زمان حرکت **مبطئه** است، بعد از لحظه t_1 سرعت بینهـایت ترقی مینمـاید یعنی حرکت **مسرعه** میگردد .



س ۲۲

امثله ـ ۱ ـ تحت چه زاویه باید M راباسرعت‌اولیه v_0 پرتاب نمود تابنقطه معین M_1 بمختصات (x_1 و y_1) واصل گردد.

ملاحظه‌میکنیم که مختصات M_1 در معادله (۸) صدق مینماید بقسمیکه معـادلهٔ بحسب tga تشکیل میگردد بدین صورت :

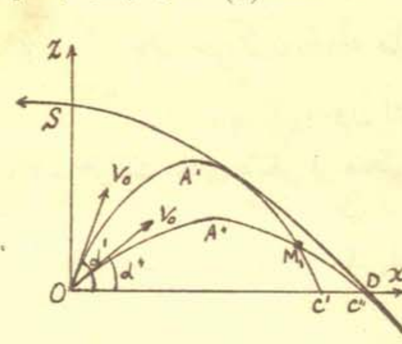


$$z_1=-\frac{gx_1^2}{2v_0^2\cos^2 a}+x_1 tga$$

و یا

$$z_1=-\frac{gx_1^2}{2v_0^2}(1+tg^2 a)+x_1 tga$$

یعنی بالاخره: $\frac{gx_1^2}{2v_0^2}tg^2 a - x_1 tga+z_1+\frac{gx_1^2}{2v_0^2}=0$



س ۲۳

مقدار a را که از این معادله بدست میاید **زاویه هدف** مینامند

بحث ـ معادله مزبور در صورتی دارای دوریشه حقیقی است‌که

$$x_1^2-4\frac{gx_1^2}{2v_0^2}\left(z_1+\frac{gx_1^2}{2v_0^2}\right)\geq 0 \qquad (a)$$

چون طرفین‌را بر $\frac{2gx_1^2}{v_0^2}$ قسمت کنیم حاصل میگردد:

$$\frac{v_0^2}{2g}-z_1-\frac{gx_1^2}{2v_0^2}\geq 0$$

که میتوان آنرا بدین صورت نوشت

$$z_1 \le -\frac{g x_1^2}{2v_0^2} + \frac{v_0^2}{2g} \qquad (b)$$

منحنی (c) $z = -\frac{g x^2}{2v_0^2} + \frac{v_0^2}{2g}$ را رسم مینمائیم این منحنی سهمی است بمحور Oz وراس S بقسمیکه $OS=\frac{v_0^2}{2g}$ و ممیزآن $=\frac{v_0^2}{g}$ است و محور Oxرا در نقاط D وD' قطع مینماید بطریقیکه $OD=\frac{v_0^2}{g}$

$$OD' = -\frac{v_0^2}{g} ,$$

بنا بر شرط (b) باید $z_1 \le z$ ؛ نقاط منحنی (c) و نقاط داخلی آن حائز شرط مسئله میباشند و حال آنکه نقاط خارجی فاقد این شرط هستند و از همینجا است که منحنی (c) را **سهمی اطمینان** مینامند.

۲ ـ حرکت نقطه مادی غیر آزاد

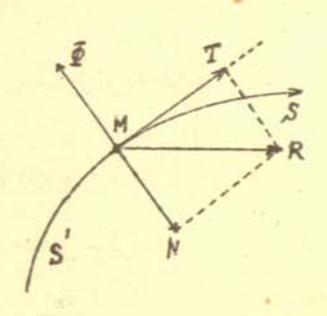
ا ـ بدون اصطکاك

۳۶ ـ حرکت مادی متکی بر منحنی مستوی صیقلی سیرمینماید. $S'S$ را منحنی مستوی و M را نقطه متحرك اختیار مینمائیم. میتوان این نقطه را تحت تاثیر قوه R و عکس العمل Φ آزاد فرض نمود

معادله حرکت از اتحاد: $m(\Gamma) = (F)$ نتیجه میشود که میتوان آنرا بدینصورت نوشت $m(\Gamma) = (R) + (\Phi)$ طرفین تساوی را برامتداد مماس نقطه M از منحنی تصویر میکنیم حاصل میشود

m تصویر (Γ) = تصویر R + تصویر (Φ)

اما تصویر $(\Phi) = 0$ پس حاصل میشود



س ٢٤

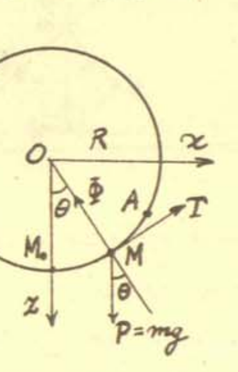
$$m\frac{d^2s}{dt^2} = R_t \quad \text{و یا} \quad m\frac{dv}{dt} = R_t$$

و این معادله حرکت نقطه بر منحنی مفروض است

مورد استعمال ـ معادله حرکت نقطه مادی را که برمحیط دائرهٔ قائمی متکی است تعیین نمائید.

M_0 را مبداء طول اختیار مینمائیم و جهت مثبت آنرا از M_0 بطرف A فرض میکنیم، ضمنا جهت مثبت را بر قائم از فوق به تحت قرارداد مینمائیم

متحرك بدون سرعت از نقطه A ($M_0OA = \alpha$) رها شده و در لحظه t تحت اثر وزن خود (mg) و عکس العمل Φ از دائره در نقطه M ($M_0OM = \Theta$) واقع میباشد قوای مزبور را بر امتداد مماس مرسوم از نقطه M تصویر مینمائیم، تصویر Φ بر مماس صفراست و تصویر (mg) چنینست



س ٢٥

$$mg.\cos PMT = -mg.\sin\Theta$$

بنا بر این معادله ذیل نتیجه میشود

$$\frac{md^2s}{dt^2} = -mg.\sin\Theta$$

اما $s =$ قوس $M_0M = R\Theta$ پس $\frac{d^2s}{dt^2} = R\frac{d^2\Theta}{dt^2}$

و یا

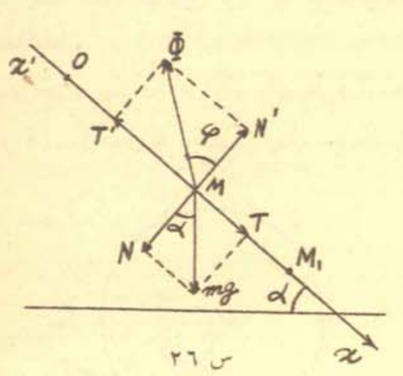
$$\frac{d^2\Theta}{dt^2} = -\frac{g}{R}\sin\Theta$$

و این معادله فاصله حرکت پاندولی است

ب ـ با اصطکاك

۳۷ ـ حرکت نقطه وزین برصفحهٔ مایل ناهموار ـ $x'x$ را امتداد بزرگترین شیب صفحه و α را زاویهٔ آن با افق اختیار مینمائیم.

در لحظه t نقطه وزین M تحت تاثیر وزن خود (mg) (جهت قائم را از فوق بتحت اختیار مینمائیم) و قوه Φ که با قائم بر صفحه زاویه برابر φ دارد واقع میباشد ، قوه قائم (mg) دارای مولفه مانند (N) قائم بر صفحه است که بوسیله عکس العمل (N') صفحه از بین میرود و یك مولفه مماسی T که بموازات بزرگترین شیب صفحه ممتد میباشد ؛ تصویر مماسی Φ یعنی T' که آنرا **قوه اصطكاك** میگوئیم



س ۲۶

در جهت مخالف سرعت متحرك ممتد است و مقدار آن چنین است

$$T'=N'.tg\varphi=mg.\cos\alpha.tg\varphi$$

اگر سرعت اولیه صفر بوده یا در امتداد بزرگترین شیب صفحه ممتد باشد ، متحرك همواره بر این خط واقع خواهد بود ، زیرا شتاب مجموع قوای (T) و (T') موافق امتداد $x'x$ میباشد . بنا بر این در متحرك سرعتی موافق همین امتداد ایجاد مینماید .

حالت اول ـ متحرك از نقطه O بدون سرعت اولیه رها شده $v_0=0$

معادله حرکت ـ از دستور اصلی $(F)=m(\gamma)$ که برمحور $x'x$ تصویر شود چنین نتیجه میگردد

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=T-T'=mg(\sin\alpha-\cos\alpha.tg\varphi)$$

و یا

$$\gamma=\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{g.\sin(\alpha-\varphi)}{\cos\varphi} \qquad (۱)$$

چون از رابطهٔ اخیر دو مرتبه تابع اولیه استخراج کنیم حاصل میشود

$$v=\frac{dx}{dt}=g.\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\cos\varphi}.t \qquad (۲)$$

$$x=\frac{1}{2}g\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\cos\varphi}t^2 \qquad (۳)$$

بحث ـ ۱ ـ اگر $\alpha\leq\varphi$ (س قبل) M بیحرکت خواهد ماند زیرا در اینصورت $T\leq T'$ ، T' قوهٔ است که متقابل با حرکت میباشد .

ب ـ اگر $\alpha>\varphi$ و یا $T>T'$ (س ۲۷) M بطرف تحت لغزش خواهد نمود زیرا قوه محرکی مانند $T-T'$ موجود است که بطرف Ox متوجه میباشد ، این قوه مقدار ثابت است یعنی **حرکت متشابه التغییر و مسرعه است .**

س ۲۷

حالت دوم ـ متحرك بطرف تحت باسرعت اولیه $v_0>0$ پرتاب شده

معادله حرکت ـ مانند حالت اول میتوان معادله حرکت را تعیین نمود با این تفاوت که در اینحال مقدار ثابت استخراج تابع اولیه صفر نیست . بنا بر این :

$$\gamma=\frac{d^2x}{dt^2}=g.\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\cos\varphi} \qquad (۴)$$

$$v=\frac{dx}{dt}=g.\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\cos\varphi}.t+v_0 \qquad (۵)$$

$$x=\frac{1}{2}g.\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\cos\varphi}.t^2+v_0t \qquad (۶)$$

بحث ـ ۱ ـ اگر $\alpha<\varphi$ از معادله (۴) معلوم میشود که شتاب مقداری ثابت ولی منفی است پس بدوا **حرکت متشابه التغییر و مبطئه است .**

سرعت در لحظه $t_1'=\frac{v_0\cos\varphi}{g.\sin(\varphi-\alpha)}$ صفر میشود بقسمیکه مقدار OM در اینموقع چنین است :

$$HM_1=x_1=\frac{v_0^2\cos\varphi}{2g.\sin(\varphi-\alpha)}$$

حرکت در نقطه M_1 متوقف میگردد .

ب ـ اگر $\alpha=\varphi$ شتاب برابر صفر بوده یعنی **حرکت متشابه خواهد بود**

ج ـ هرگاه $\alpha>\varphi$ شتاب مثبت ، **و حرکت متشابه‌التغییر و مسرعه است**

حالت سوم ـ متحرك از نقطه O بطرف فوق موافق امتداد بزرگترین شیب صفحه صفحه بسرعت اولیه $v_0<0$ پرتاب شده

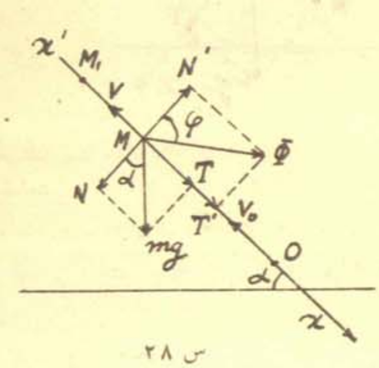
قوه اصطکاك T' که مختلف الجهت با سرعت است مادام که سرعت منفی است بطرف بالا ممتد میباشد ؛ معادلات شتاب و سرعت و حرکت چنین‌اند

$$\gamma=\frac{d^2x}{dt^2}=g\frac{\sin(\alpha+\varphi)}{\cos\varphi}$$

$$v=\frac{dx}{dt}=g.\frac{\sin(\alpha+\varphi)}{\cos\varphi}.t-v_0$$

$$x=\frac{1}{2}g.\frac{\sin(\alpha+\varphi)}{\cos\varphi}t^2-v_0t$$

شتاب مثبت است تا وقتی که سرعت منفی است حرکت متشابه‌التغییر و مبطئه است .



س ۲۸

اما سرعت در لحظه $t_1=\frac{v_0\cos\varphi}{\sin(\alpha+\varphi)}$ برابر صفر میگردد و در این لحظه مقدار OM_1 چنین است :

$$OM_1=x_1=-\frac{v_0^2\cos\varphi}{2g.\sin(\alpha+\varphi)}$$

از زمان t_1 بعد متحرك حاوی شرایط حالت اول است بنا بر این ؛

ا ـ اگر $\alpha\leqq\varphi$ متحرك بحال تعادل باقی خواهد ماند

ب ـ اگر $\alpha>\varphi$ متحرك موافق امتداد بزرگترین شیب صفحه باحرکت متشابه‌التغییر مسرعه نزول مینماید

تبصره ـ حرکت نقطه مادی وزین بر صفحه مایل صیقلی مانند فوق است با این تفاوت که در اینمورد باید φ را برابر صفر اختیار نمود

در اینصورت شتاب $\gamma=g\sin\alpha$ همواره مثبت است و از اینجا نتایج ذیل عاید میشود

ا ـ اگر سرعت اولیه صفر بوده یا بطرف تحت متوجه باشد حرکت **متشابه‌التغییر و مسرعه است .**

ب ـ اگر سرعت اولیه بطرف فوق متوجه باشد حرکت دارای دو فاصله متمایز است .

در فاصله اول **متحرك صعود کرده وحرکت آن متشابه‌التغییر و مبطئه است** در فاصله دوم **باحرکت متشابه‌التغییر مسرعه نازل میگردد**

تمرینات

۳۷ ـ نقطه وزین C را در خلاء ازتحت بفوق پرتاب کرده‌ایم ، A نقطه عزیمت و M وضع آن پس از زمان t است ؛ فاصله AM و سرعت نقطه M را تعیین کنید ، مدت حرکت صعودی چقدر است ؛ ماکزیموم صعود متحرك را تعیین نمائید

v_0 را سرعت اولیه متحرك فرض میکنیم و نقطه مانند 'C بقسمی اختیار مینمائیم که بر قائم A در نقطه B واقع باشد بقسمیکه از آن بارتفاع k قرار گرفته و با حرکت متشابه بطرف A حرکت نماید و سرعت آن u باشد . لحظه عزیمت دو متحرك مشترك است در چه لحظه‌وچه فاصله از B نقطه 'C نقطه اولی را ملاقات میکند (بحث)

۳۸ ـ از نقطه بارتفاع k فوق افقیه Ox جسمی باسرعت v_0 که افقا ممتد است پرتاب شده ، B نقطهٔ است که درآن جسم Ox را تلاقی مینماید ، مقصود محاسبه طول OB ومدت سقوط است ، سرعت جسم هنگامیکه بخاك میافتد چقدر است ظل زاویهٔ که سرعت با زمین ایجاد مینماید تعیین نمائید

مثال عددی : متر $h=۹۸$ و ۱۰۰ متر در ثانیه $=v_0$ $g=۹,۸$

۳۹ ـ ترنی بر مستقیم OX باسرعت ۹۰ کیلومتر در ساعت سیر مینماید ، از نقطه A از این ترن میتوان در صفحه قائم OXY جسمی را باسرعت اولیه ۱۰۰ متر در ثانیه بامیل ۶۰^0 نسبت به OX پرتاب نمود ، نقطه A در ترن از نقطه O حرکت نموده ، جسم را پس از چه زمانی باید پرتاب کرد تا بنقطهٔ K که افقا از O مقدار ۳ کیلومتر فاصله دارد برسد وضمنا ارتفاع آن از Ox درصفحه OXY

س ۲۹

برابر ۹۰ متر بشود ، مسئله دارای دو جواب است ، بازاء کدام یك از جوابها جسم زودتر بنقطه K میرسد ، و بازاء کدام یك از آنها جسم با سرعت زیاد تر بنقطه K واصل میشود مقاومت هوارا غیرقابل ملاحظه و g را برابر ۱۰ متردرثانیه منظور میداریم

۴۰ ـ در صفحه قائم P متحرك M از نقطه A و از مبداء زمان بر افقیه Ax با حرکت متشابهی بسرعت v حرکت مینماید ، O نقطه‌است که تحت قائم A بفاصله $OA=h$ قرار دارد ، در چه زمانی مانند t_0 باید نقطه مادی وزینی را با سرعت اولیه v_0 ازنقطه O پرتاب کرد بقسمیکه زاویه آن با افق α بوده و متحرك M را ملاقات نماید

مثال عددی : ۷۲ کیلومتر در ساعت $=v$ و ۵۰۰ متر در ثانیه $=v_0$ و ۲۰۰۰ متر $=h$ و $tg\alpha=\frac{۴}{۳}$

ثانیه را واحد زمان و شتاب ثقل را ۶۰ متر در ثانیه اختیار مینمائیم

۴۱ ـ دو نقطه A و B در یك صفحه افقی و بفاصله d از یکدیگر قرار دارند ، از نقطه A جسمی را در امتداد قائم A با سرعت اولیه v_0 از تحت بفوق پرتاب مینمائیم درهمین لحظه از نقطه B جسم دیگری را در امتداد خطی از صفحه قائم مار بر AB که با AB زاویه α ایجاد مینماید رها مینمائیم

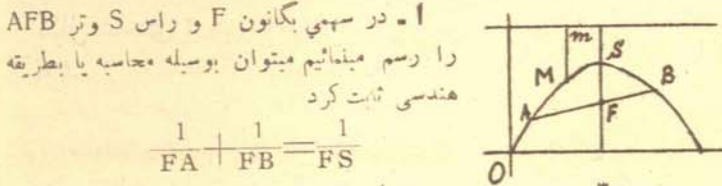
ا ـ مقصود محاسبه سرعت اولیه متحرك دوم است بنا بر آنکه متحرك اولی را تلاقی کند

ب ـ نقطه تلاقی ، موقع صعود یا نزول متحرك اول یا دوم است

۴۲ ـ نقطه مادی وزین M را در خلاء با سرعت اولیه v_0 بقسمی پرتاب مینمائیم که سرعت اولیه آن با صفحه افقی مار بر O زاویه برابر α ایجاد نماید ، در صفحه مسیر خطی مانند D مفروض است

ا ـ درچه‌زمانی متحرك M برخط D واقع میگردد (مبدا زمان همانلحظه عزیمت از O است)

ب ـ بفرض آنکه v_0 مقدار معینی باشد مقصود محاسبه مقدار α است بقسمی که متحرك M در لحظه معین t_0 خط D را تلاقی کند



س ۳۰

ا ـ در سهمي بکانون F و راس S وتر AFB را رسم مینمائیم میتوان بوسیله محاسبه یا بطریقه هندسی ثابت کرد

$$\frac{1}{FA}+\frac{1}{FB}=\frac{1}{FS}$$

ب ـ نقطه وزین در خلاء در نقطه O باسرعت اولیه v_0 که با افق میل α را دارد رها شده ثابت کنید سرعت v در وضعی از M که از صفحه افقی بارتفاع $\frac{v_0^2}{2g}$ بفاصله $\overline{Mm}$ قرار دارد بوسیله دستور $v^2=2g\overline{Mm}$ معین میگردد

ج ـ چنانچه v_1 و v_2 سرعت های متحرك هنگام وصول بنقاط A و B دو انتهای وتر

AFB باشد ثابت کنید

$$\frac{1}{v_1^2}+\frac{1}{v_2^2}=\frac{1}{v_0^2\cos^2\alpha}$$

۴۳ ـ دو محور متعامد Ox و Oy که دومی قائم واز تحت بفوق متوجه است مفروض‌اند متحرك m از نقطه O با سرعت v_0 که با افق زاویه برابر α ایجاد مینماید پرتاب‌شده ، متحرك دیگر M در همین لحظه با سرعت $v_0\sqrt{2}$ بمیل 45^o نسبت بافق از نقطه A ($OA=2a$ و $xOA=۳۰^o$ زاویه) (س ۳۱) رها گردیده

ا ـ مختصات نقاط m و M را در زمان t معین کنید

ب ـ اگر نسبت $\frac{v_0}{V_0}$ برابر k باشد a را بقسمی تعیین کنید که دو متحرك یکدیگر را ملاقات نمایند ، مینیموم k چقدر است (بحث)

ج ـ شرایطي بین v_0 و V_0 و a و g مقرر نمائید که دو متحرك در موقع تلاقی دارای یك سرعت باشند

س ۳۱

د ـ طول نقطه تلاقی P دومتحرك را بحسب a و α تعیین نمائید ، α را چه مقدار باید اختیار کرد تا این طول برابر a شود ، بنا بر معلوم بودن این مقدار مقادیر v_0 و V_0 را بحسب a و g معین نمایید ، (برای این منظور شرایط ج را مراعات کنید) عرض نقطه P چقدر است ، ثابت کنید در لحظه تلاقی سرعت مشترك دو متحرك برابر سرعت اولیه M است ، دو مسیر را از مبداء عزیمت تا نقطه تلاقي رسم کنید

۴۴ ـ جسم M را با سرعت اولیه v_0 که با افق زاویه α تشکیل میدهد پرتاب کرده‌اند در صفحه هدف حرکت مزبور را بمحورهای Ox و Oy که اولی افقی و دومی قائم است نسبت میدهیم

ا ـ مقصود تعیین تغییرات OP بنابر تغییرات α است

ب ـ محاسبه مساحت قطعه از سهمی که محصور بین افق و منحني است منظور است و بعلاوه تغییرات آن را بازاء مقادیر مختلفه α تعیین نمایید

ج ـ از نقطه $I(a,b)$ در صفحه هدف جسم M' را بحالت آزادي بدون سرعت اولیه در همان لحظه که جسم اول از O حرکت میکند رها کرده ایم زاویه α را بقسمی تعیین کنید که دو متحرك یکدیگر را تلاقی کنند

س ۳۲

مکان هندسی نقاط I را بقسمی تعیین کنید که نقطه تلاقی دو جسم بر صفحه افقی مار

بر O باشد ، بعلاوه معلوم کنید که نقطه I ، باید درکدام ناحیه ازصفحه هدف واقع باشد تا نقطه تلاقی فوق یا تحت افق O قرار گیرد

۴۵ ـ از نقطه O جسم M با سرعت اولیه v_0 که با صفحه افق زاویه α ایجاد میکند پرتاب شده ، پس از زمان t_1 از نقطه A جسم M بدون سرعت اولیه رها گردیده

ا ـ مقصود محاسبه زمان t_1 است بقسمیکه جسم M' با جسم M ملاقات نماید

ب ـ در چه ناحیه نقطه A باید واقع باشد برای آنکه ملاقات دو جسم فوق یا تحت افق مار بر O اتفاق افتد

A را فوق صفحه افق مار بر O بفاصله h از صفحه و بفاصله d از قائم Oz مار بر نقطه O اختیار مینمائیم مقاومت هوا را هیچ میپنداریم

٤٦ ـ متحرکی با سرعت ۲ متر در ثانیه در امتداد بزرگترین شیب صفحه که با افق زاویه ٦٠^0 دارد بطرف بالا پرتاب شده ، پس از ده ثانیه متحرك چه فاصله از نقطه عزیمت خود دارد و سرعتش دراین لحظه‌چقدراست ، اصطکاك صفر $g=٩٨٠$ CGS

۴۷ ـ بر صفحه بشیب α جسمی با سرعت v_0 از تحت بفوق موافق امتداد بزرگترین شیب صفحه پرتاب شده پس از زمانی سرعت جسم برابر v میگردد در این حال مسافت مطویه چقدر است

۴۸ ـ در مثلث قائم الزاویه ABC که زاویه A قائمه و ضلع AB قائم است جمیع خطوط مرسوم از نقطه A بر نقاط مختلفه وتر مانند AD را رسم میکنیم

ا ـ زاویه BAD را زاویهٔ اختیار میکنیم که جسم متحرك از A بدون سرعت اولیه خط AD را در مینیموم زمان طی نماید

ب ـ ظل زاویه ACD را درحالتی معین کنید که زمان مینیموم مزبور مساوی نصف زمانی باشد که جسم موافق امتداد AB ساقط میگردد

۴۹ ـ در صفحه قائمی تیغهٔ افقی $x'Ox$ و نقطه A بر آن مفروض اند نقطه مانند A بر قائم O قرار دارد مستقیم BC واصل بین B ونقطه C واقع بر $x'x$ ومابین O و A میباشد ، نقطه مادی وزینی بدون سرعت اولیه فوق B رها شده بقسمیکه بدوا امتداد BC و پس از آن امتداد CA را طی مینماید ، تیغه هارا کاملا صیقلی فرض مینمائیم وچنین تصور میکنیم که بمناسبت تیغه منحنی الخط کوچکی که بر نقطه C قرار داده ایم در موقع عبور از تیغه اولی بدومی تنهاجهت سرعت متحرك تغییر میکندولی قدرمطلق آن ثابت میماند

س ۳۳

ا ـ مقصود محاسبه زمان T است که در آن متحرك از B به A داخل میگردد بحسب $OA=a$ و $OB=b$ و g و $OCB=x$ زاویه

ب ـ تغییرات T را وقتی x تغییر مینماید تعیین نمائید بنا برآنکه C مابین O و A باقی بماند

۵٠ ـ دو فرجه مجاور تشکیل سه صفحه عمود بر صفحه شکل که قائم فرض شده داده اند ، اثر اولی با صفحه شکل افقیه BC وآثار دو صفحه دیگر خطوط CD و AB میباشد که با افقیه مزبور میل ٦٠^0 دارند بعلاوه ۲متر $=AB=BC=CD$ ، متحرکی را از نقطه A بدون سرعت اولیه رها کرده‌ایم بقسمیکه متوالیا بر مسیرهای ABCD و DCBA و . . . حرکت مینماید

ا ـ قانون حرکت این نقطه چیست ، **ب** ـ بعد از چه زمانی مجددا بنقطه A برمیگردد ، **ج** ـ دیاگرام سرعت ومسافت را نسبت بزمان t رسم کنید باشتاب ثقل برابر ۱۰۰۰ در سلسله CGS است

س ٣٤

۵۱ ـ گلولهٔ بدون سرعت اولیه از راس A صفحه AB بطول متر $l=٨$ رها شده میل صفحه ٣٥^0 است پس از چه زمان و بچه فاصله از موقع تلاقی قائم مار بر B ، زمین که بفاصله ۱۰ متر قراردارد بزمین میرسد

۵۲ ـ خط OK در صفحه قائمی که با افق Ox زاویه α را ایجاد مینماید واقع است نقطه مادی وزین M از نقطه O با سرعت اولیه افقی v_0 پرتاب شده در همین لحظه نقطه مادی وزین M' بر OK شروع بلغزش بدون اصطکاك مینماید مقصود تعیین تغییرات زاویه MM' با افق میباشد (شتاب ثقل را g اختیار نمائید)

۵۳ ا ـ در صفحه قائم xOy که افقیه Ox و قائم Oy مشخص است نقطه مانند K موجود است بقسمیکه $KOx=\beta<١٠٠gr$ و $OK=l$.

از نقطه O نقطه مادی وزین M را که بجرم m است ، با سرعت v رها کرده اند بطریقیکه با افق زاویه α را که ایجاد مینماید $(\alpha<١٠٠gr)$ ، نقطه مزبور ضمن حرکت سهمی شکل به نقطه K واصل میگردد ، مقصود تعیین مقدار مینیموم v است

س ۳۵

برای آنکه متحرك بتواند بنقطه K برسد ، چنانچه مقدار مینیموم مزبور V باشد مقصود تعیین زمان وصول نقطهٔ وزین به نقطه K است ، و بالاخره زاویه α که متناظر با این مینیموم است دارای چه مقدار میباشد

ب ـ میتوان نقطه M را بر صفحه مایلی که بزرگترین شیبش OK است حرکت داد تا بنقطه K واصل گردد ، مقدار مینیموم V_1 سرعت برای این منظور و زمان سیر بر

OK چقدر است ، ثابت کنید که طریقه اخیر برای وصول نقطه به K از نقطه نظر سرعت اولیه ترجیح داشته و از نقطه نظر زمان دارای نقص است یعنی

$$V_1 < V \text{ اما } T_1 > T$$

مثال عددی : بنا بر آنکه $\beta = ٤٨gr\ ١٠٩٢$ مقصود محاسبه نسبت $\frac{V}{V_1}$ و زاویهٔ α متناظر با سرعت منیموم V است

۵٤ - در صفحه قائم xOy محور افقی Ox و محور دیگر Oz تحت این محور با زاویه حاده $zOx = \alpha$ مفروض است ، نقطه مادی M بجرم m متکی بر Oz بدون اصطکاك متحرك است ، متحرك مزبور را باسرعت V_0 در جهت Oz پرتاب کرده اند ، در همین لحظه متحرك دیگر M' را بجرم m با سرعت V'_0 در جهت Ox بطور آزاد رها نموده‌اند ، میدانیم متحرك اخیر بر قوس سهمی P سیر مینماید

س ۳٦

ا - معادلات حرکت مستقیم الخط M را نسبت بمحور افقی Ox و محور قائم Oz بنویسید

ب - معادلات حرکت سهمی شکل M' را نسبت بهمین محورها تعیین نمائید

ج - چه روابطی باید بین مفروضات مسئله موجود باشد تا دو متحرك که از نقطه O با هم شروع بحرکت کرده‌اند در نقطه تقاطع Oz و سهمی یکدیگر را ملاقات نمایند

د - شرط قبل مقرر است تغییرات طول قطعه خط MM' مطلوب است هنگامیکه دو متحرك از O تا K سیر مینمایند

۵۵ - نقطه‌وزینی‌از راس‌صفحه مایلی بدون‌سرعت رها شده ، برای‌سیر ۳۵ متر چقدر مدت لازم دارد ، بفرض آنکه بر خط بزرگترین شیب صفحه سیر کرده و طول تصویر افقی این قطعه برابر ۱۸ متر و ضریب اصطکاك $f = ٠,٢٠$ باشد

۵٦ - نقطه وزینی را برخط ثابت Ox که با افق زاویه α را ($tg\alpha = ٠,٢$) ایجاد مینماید بطرف بالا باسرعت v_0 برابر ۳متر در ثانیه پرتاب کرده اند ، ضریب اصطکاك $f = ٠,١$ است ، با چه سرعتی متحرك مجددا بنقطه عزیمت خود رجعت مینماید زمان صعود و نزول را تا یکصدم ثانیه تقریب حساب نمائید

فصل چهارم - کار

۳۸- موضوع‌کار در جراثقال حائز اهمیت بسیار است ، زیرا عمل ماشینها تبدیل انرژی بکار است . در این فصل کار حاصل از قوهٔ مفروض **ه** بنقطه مادی وارد شده تعیین مینمائیم .

بدوا مقدمات ذیلرا که درمورد تعریف‌کار استعمال‌میشود متذکر میشویم

۳۹. تعریف - حاصل‌ضرب‌هندسی دوحامل P_1 و P_2 عبارت‌است از حاصل ضرب جبری ایندو حامل در جیب تمام زاویهٔ بین آنها یعنی

$$(P_1) \times (P_2) = \overline{P}_1 \times \overline{P}_2 \cos(P_1 , P_2) .$$

محاسبهٔ حاصلضرب هندسی دو حامل بوسیلهٔ طول تصاویر آنها بر سه محور متعامد - فرض میکنیم نسبت بسه محور متعامد تصاویر حاملهای (P_1) و (P_2) بترتیب X_1وX_2وY_1وY_2وZ_1وZ_2 باشند بقسمیکه بتوان چنین نوشت ؛

$$(P_1) = (X_1) + (Y_1) + (Z_1) \quad \text{و} \quad (P_2) = (X_2) + (Y_2) + (Z_2)$$

حاصلضرب طرف اول دو تساوی بنا برتعریف فوق همان حاصلضرب هندسی حاملها است و چون جمل طرف ثانی یکی از دو تساوی را بترتیب در جمل طرف ثانی تساوی دیگر بطریق هندسی ضرب نموده ملاحظه کنیم که زاویه محورها نسبت بهم قائمه بوده و ضمنا زوایای (X_1وX_2)و(Y_1وY_2) و (Z_1وZ_2) برابر صفر است حاصل میگردد .

$$(P_1)(P_2) = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2$$

اما چون بنا بر تعریف $(P_1)(P_2) = \overline{P}_1 . P_2 \cos(P_1 , P_2)$ پس نتیجه میشود

$$\overline{P}_1 . \overline{P}_2 \cos(P_1 , P_2) = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2$$

وازاین تساوی‌معلوم میگردد

$$\cos(P_1 , P_2) = \frac{X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2} . \sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}}$$

حال اگر حاملهای P_1 و P_2 بر یکدیگر عمود باشند یعنی $\cos(P_1 , P_2) = 0$

نتیجه میشود $X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2=0$ (١)

حال اگر (a_1 و a_2) و (β_1 و β_2) و (γ_1 و γ_2) را بترتیب زوایای حاملهای مفروض با محورهای مختصات اختیار نمائیم بمناسبت تساویهای

$$X_1=P_1\cos a_1 \quad و \quad Y_1=P_1\cos\beta_1 \quad و \quad Z_1=P_1\cos\gamma_1$$
$$X_2=P_2\cos a_2 \quad و \quad Y_2=P_2\cos\beta_2 \quad و \quad Z_2=P_2\cos\gamma_2$$

رابطهٔ (١) را میتوان بصورت ذیل نوشت

$$\cos a_1\cos a_2+\cos\beta_1\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cos\gamma_2=0 \quad (٢)$$

و این رابطه شرط متعامد بودن دو خط را بحسب زوایای آنها با محورها معین میسازد.

١ـ کار قوی

برای توضیح بدوا در موارد مختلفه مخصوص کار را تعریف نموده سپس تعریف کلی آنرا ذکر مینمائیم.

٤٠ـ اولا کار قوای ثابت ـ کارقوه ثابت (از حیث کمیت و امتداد و جهت) در تغییر مکان مستقیم الخط ـ کار قوه F (TF) در تغییر مکان MM' با نقطه اثر M عبارت است از حاصل ضرب هندسی :

$$(F).(MM')$$

ویابعبارت جبری $TF=\overline{F}.\overline{MM'}\cos(F,MM')$ (١)

س ٣٧

دو عامل اول حاصلضرب طرف ثانی تساوی (١) مثبت فرض میشوند پس علامت کار همواره با عامل سوم متحد است. بنا بر این:

کار **مثبت یا محرک** است اگر $0<a<\frac{\pi}{2}$ یا $\frac{3\pi}{2}<a<2\pi$

کار **منفی یا مقاوم** است وقتی $\frac{\pi}{2}<a<\frac{3\pi}{2}$

کار **صفر** است هرگاه $a=\frac{\pi}{2}$ یا $a=\frac{3\pi}{2}$

٤١ـ کار قوه ثابت در تغییر مکان مرکب ـ قضیه ـ کار قوه ثابت در تغییر مکان منتجه مساوی مجموع جبری کارهای تغییر مکان مؤلفه‌ها است ـ فرض میکنیم (F) قوه و (MM') تغییر مکان منتجه باشد بقسمیکه

$$(MM')=(MM_1)+(M_1M_2)+(M_2M_3)+(M_3M')$$

این تساوی هندسی را بر امتداد قوه (F) تصویر میکنیم حاصل میشود

$$MM'.\cos(F,MM')=MM_1.\cos(F,MM_1)+\dots\dots+M_3M'.\cos(F,M_3M')$$

طرفین این تساویرا در (F) ضرب میکنیم حاصل میگردد:

س ٣٨

$$F.MM'\cos(F,MM')=F.MM_1.\cos(F,MM_1)+\dots+F.M_3M'\cos(F,MM')$$

از این تساوی معلوم میشود که کار قوه (F) در تغییر مکان منتجه (MM') برابر مجموع جبری کارهای تغییر مکانهای مولفه ها است.

تبصره ـ بطریقی متشابه با فوق میتوان اثبات نمود که **کار منتجه (R) از یکدسته قوای (F_1) و (F_2) و ... برابر مجموع جبری کارهای مؤلفه ها در تغییر مکان مستقیم الخط (MM') است.**

زیرا بنا بفرض

$$(R)=(F_1)+(F_2)+(F_3)+\dots$$

مجموع هندسی فوق را بر امتداد MM' تصویر میکنیم نتیجه میشود

$$R.\cos(R,MM')=F_1.\cos(F_1,MM')+F_2.\cos(F_2,MM')+F_3.\cos(F_3,MM')+\dots$$

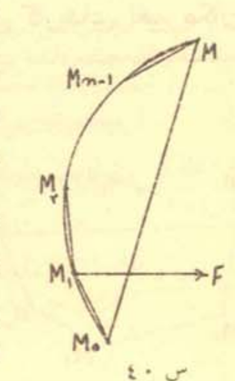
طرفین تساویرا در MM' ضرب مینمائیم حاصل میشود.

س ٣٩

$$R.MM'.\cos(R,MM')=F_1.MM'.\cos(F_1,MM')+F_2.MM'\cos(F_2,MM')+F_3.MM'.\cos(F_3,MM')+\dots$$

بنا بر این حکم ثابت میشود .

۴۲- کار قوهٔ ثابت در تغییر مکان منحنی الخط - فرض میکنیم M_0M منحنی مسیر نقطه اثر قوهٔ ثابت (F) باشد، در این منحنی منکسری مرکب از n خط M_0M_1 و M_1M_2 و ... و $M_{n-1}M$ محاط میکنیم، فرض مینمائیم قوهٔ F بجای سیر بر منحنی بر دورهٔ منکسر حرکت نماید بنابر حکم قبل کار F در تغییر مکان $M_0M_1 \ldots M_{n-1}M$ برابر کار قوه در امتداد وتر M_0M است، چون n را بسمت بینهایت میل دهیم دورهٔ منکسر به منحنی M_0M نزدیك میگردد یعنی کار بر امتداد منحنی، برابر کار بر امتداد وتر M_0M است. **بنا بر این کار بشکل منحنی بین نقاط M_0 و M بستگی ندارد .**



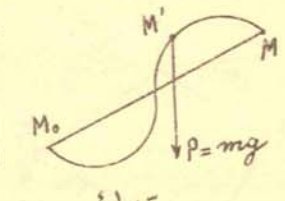
س ٤٠

پس بمناسبت آنکه کار (F) موافق منحنی M_0M تبدیل بکار (F) موافق تغییر مکان مستقیم الخط M_0M میگردد میتوان کار را بدینصورت نوشت

$$TF = F . \text{وتر}\ M_0M \cos(F . M_0M)$$

و یا $TF = F \times$ (تصویر وتر M_0M بر (F))

تبصره - از رابطهٔ اخیر میتوان دستور کار ثقل P را بر متحرکی که روی منحنی غیر مشخصی مابین M_0 و M سیر مینماید تعیین نمود . زیرا در اینصورت چنین خواهیم داشت



س ٤١

$F = mg$ (قدر مطلق وزن P از متحرك) :

تصویر وتر M_0M بر امتداد P $= z - z_0$

بنابر آنکه z و z_0 ارتفاعات نقاط M و M_0 باشند، بنا بر این حاصل میشود

$$TP = -mg(z - z_0)$$

۴۳- ثانیاً در حالتی که قوی متغیر باشند - کار قوه متغیر در تغییر مکان منحنی الخط .

۱ - دستور تقریبی - در منحنی M_0M منکسری مرکب از n ضلع M_0M_1 و M_1M_2 و ... و $M_{n-1}M$ محاط میکنیم، فرض میکنیم (F_0) و (F_1) و ... (F_{n-1}) حاملهای نمایش قوه متغیر باشند هنگامیکه نقطه اثر این قوی بر M_0 و M_1 و M_2 و ... و M_{n-1} قرار دارد

فرض میکنیم نقطه اثر قوه بر قوس سیر ننموده بلکه بر محیط منکسر $M_0M_1 \ldots M_{n-1}M$ حرکت نماید و ضمنا حامل F_0 هنگام طی وتر M_0M_1 و همچنین حامل F_1 ضمن حرکت بر M_1M_2 و ... همسنك خویش باقی بمانند بنابر دستور (۱) کار قوه بدینصورت خواهد بود

س ٤٢

$$F_0\, M_0M_1 . \cos(F_0 , M_0M_1) + F_1\, M_1M_2 . \cos(F_1 , M_1M_2) + \ldots\ldots + F_{n-1} . M_{n-1}M . \cos(F_{n-1} , M_{n-1}M)$$

که آنرا بطور اختصار بصورت ذیل مینویسند .

$$\sum_0^n F_k\, M_k M_{k+1} . \cos(F_k , M_k M_{k+1})$$

اندازه تقریب کار مطلوب هر قدر n را بزرگتر انتخاب کنیم کمتر میگردد

ب - حدود - هنگامیکه عده اضلاع منکسر را بینهایت اضافه کنیم دورهٔ منکسر بینهایت بمنحنی نزدیك میگردد و هر یك از جمل (Σ) بسمت حدی بینهایت کوچك میل مینماید (زیرا M_kM_{k+1} بسمت صفر میل میکند) و در اینحال مجموع (Σ) بطور کلی بسمت حد معین و مشخصی میل خواهد نمود

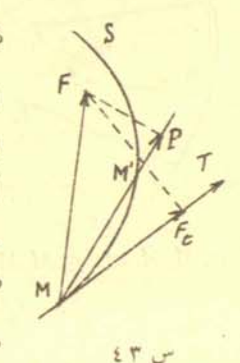
ج- کار جزئی و کار مجموع - حد $[F_k . M_kM_{k+1} . \cos(F_k . M_kM_{k+1})]$ وقتی M_kM_{k+1} بسمت صفر میل نماید (تغییر مکان بینهایت کوچك باشد) به **کار جزئی** قوه (F) موسوم میباشد (T_eF و یا dT) .

کار مجموع(F 7) در تغییر مکان منحنی الخط M_oM عبارت ازحد مجموع (Σ) است وقتی n بینهایت ترقی کند.

۴۴- عبارات کار جزئی - ا - بحسب مولفه‌های مماسی قوه -

متحرکی قوس S'S را تحت اثر قوه متغیر (F) سیر مینماید فرض میکنیم M و M' مواضع متحرك در لحظات t و $t+\Delta t$ باشد، در زمان Δt که پس از زمان t است قوه را ثابت فرض کرد، وبجای قوس MM' وتر MM' را قرار میدهیم کار F عبارت است از:

$$F.MM'.cos(F,MM')=\overline{MP}.MM'$$

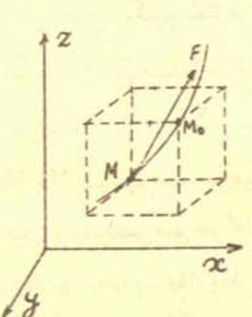


س ٤٣

$\overline{MP}$ تصویر قوه (F) بر وتر MM' است برای آنکه عبارت کار جزئی معین گردد Δt را بسمت صفر میل میدهیم در اینحال وتر MM' بسمت مماسی که از M بر منحنی رسم میگردد میل خواهد نمود و طول آن برابر قوس جزئی ds است MP بصورت **مؤلفهٔ مماسی قوه** یعنی F_t در میاید بطریقیکه: $T_e F=F_t . ds$

ثانیا عبارت تحلیلی - در لحظه t متحرك در نقطهٔ $M(x,y,z)$ بوده و تحت اثر قوه $(F)=(X)+(Y)+(Z)$ میباشد؛ در زمان جزئی dt متحرك مزبور حرکتی مانند ds خواهد کرد بقسمیکه $(ds)=(dx)+(dy)+(dz)$ کارمطلوب باین ترتیب عبارت است از حاصلضرب هندسی $(F)(ds)$ و مقدار آن چنین است.

$$T_e F=Xdx+Ydy+Zdz$$



س ٤٤

۴۵- محاسبه کارمجموع یك قوه - اولا

دستور کار - برای تعیین مقدار کار قوه

متغیر در تغییر مکان منحنی الخط در دستور (Σ) چنین فرض مینمائیم

$$P_o=F_o.cos(F_o,M_oM_1)$$
$$P_1=F_1.cos(F_1,M_1M_2)$$
$$P_{n-1}=F_{n-1}.cos(F_{n-1},M_{n-1}M)$$

س ٤٥

بعد در دستگاه محورهای متعامد $M_o(x,y)$ بر محور طول اوتار M_oM_1 و M_1M_2 و ... و $M_{n-1}M$ را نقل نموده واندازه P_o و P_1 و ... و P_{n-1} را برابر عرض آنها اختیار مینمائیم **کارقوه** (F) **بر منحنی** M_oM **در (س ٤٢) تقریبا بصورت مساحات مستطیلات** $M_oM_1B'A$ **و** $M_1M_2C'B$ **و.... و** $M_2M_1L'K$ **نموده میشود.**

بنا بر این حد این مجموع را بدست میاوریم، وقتی عده این مستطیلات بینهایت زیادشود دورهٔ منکسر $AB'BC'C...KL'$ بسمت منحنی $ABC...KL$ میل مینماید **مساحت** S **محصور بین این منحنی ومحورهای** M_ox **و** M_oy **وعرض** ML **عبارت از حد مجموع** (Σ) **خواهد بود ودر نتیجه مقدار آن عبارت از کار** (F) **بر منحنی** M_oM **است**، مجموع مزبور بطور اختصار چنین میشود:

$$S=T.F=\int_{M_o}^{M} Pdx$$

P نمایش عرض نقطه غیر معینی از منحنی ABC.....KL و dx طول بینهایت کوچك یکی از اوتار دورهٔ منکسر (س ٤٢) است بفرض آنکه دورهٔ مزبور بسمت منحنی M_oM میل نماید.

ثانیا محاسبهٔ کار - ا- طریقه حساب جامعه - چون P نمایش F_t یعنی تصویر F بر مماس منحنی M_oM و dx نمایش قوس جزئی از همین منحنی میباشند، اگر F_t تابع اتصالی از قوس M_oM باشد میتوان کار F را بوسیله استخراج جامعه (تابع اولیه) از دستور ذیل بدست آورد

$$T.F=\int_{M_o}^{M} F_t(s)ds$$

همچنین است اگر F_t و ds هر دو تابع زمان باشند

در حالات دیگر طریقهٔ ذیل را که بوسیلهٔ آن مقدار تقریبی کار معین میگردد استعمال مینمایند .

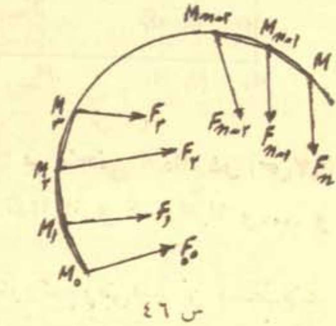
ب ـ طریقه ترسیمی ـ درمنحنی M_0M منکسری مرکب از n وترمساوی محاط مینمائیم و فرض میکنیم

$$P_0 = F_0 . cos(F_0 . M_0M_1)$$

$$P_1 = F_1 . cos(F_1 . M_1M_2)$$

$$P_n = F_n . cos(F_n . MM_{n+1})$$

بعد دردستگاه محورهای متعامد M_0x و M_0y بر محور طول قطعات M_0M_1 و M_1M_2 و . . . . و $M_{n-1}M$ را برابر



س ٤٦

طول یکی از اوتار محاط در منحنی مزبور جدا نموده و عرض هر یك را بترتیب برابر P_0 و P_1 و . . . . و P_n اختیار میکنیم ، چون منتهای عرضها را بهم وصل نمائیم n ذوذنقه که **مجموع مساحاتشان تقریبا برابر کار F برمنحنی M_0M است نتیجه میگردد .**

چون a را طول مشترك اوتار M_0M_1 و امثال آنها فرض کنیم چنین خواهیم داشت

$$T\,F = a\left(\frac{P_0 + P_1}{2} + \frac{P_1 + P_2}{2} + \ldots\ldots + \frac{P_{n-1} + P_n}{2}\right)$$

س ٤٧

و یا

$$T\,F = a\left(\frac{P_0}{2} + P_1 + P_2 + \ldots + P_{n-1} + \frac{P_n}{2}\right)$$

نتیجه عمل هرچه n را بزرگتر اختیار کنیم دقیقتر است

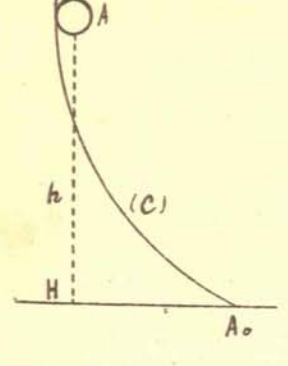
۴٦ـ آحاد کار ـ درسلسلهٔ C.G.S. واحد کار **ارك** است (دین سانتیمتر) **ژول** که واحد عملی کار است ۱۰ برابر ارگ میباشد .

درسلسله متری واحد کار **کیلوگرام متر** است وآن کار قوه است که یك کیلوگرم را بارتفاع یکمتر بالا ببرد .

فرس ویو

٤٧ ـ تعریف ـ حاصلضرب جرم نقطه مادی مفروض را در مجذور سرعت آن یعنی mv^2 را **فرس ویو** میگویند . حاصلضرب مزبور عبارت از عدد است نه حامل ، نصف این مقدار یعنی $\frac{1}{2}mv^2$ را **قوهٔ ذخیره** نقطه میگویند .

فرس ویو همواره بوسیلهٔ کیلوگرام متر یا ارگ و یا ژول معین میگردد .



س ٤٨

٤٨ ـ فرس ویو و کار ـ اهمیت فرس ویو غالبا بواسطه رابطه ایست که با کار دارد ، فرض میکنیم کلولهٔ بجرم M در نقطه A بارتفاع h فوق صفحهٔ H واقع باشد ؛ نقطه مزبور بنا بر وضع کنونی خود حاوی کاری است که مقدارش برابر $T = Mgh$ میباشد .

جسم را در امتداد منحنی (C) رها میکنیم تا بنقطه A_0 که در آن $h = 0$ است برسد نقطه مزبور فاقد کار مذکور میگردد اما بمناسبت آنکه در این نقطه دارای سرعت v میباشد دارای فرس ویوی برابر Mv^2 خواهد بود .

۴۹ ـ قضیه فرس ویو برای نقطه مادی ـ تغییر نیمه فرس ویو نقطه مادی در حرکت بین لحظات t_0 و t برابر مجموع کارهای جمیع قوائی است که بر این نقطه موقع تغییر مکان مزبور وارد میگردد

اولا بدوا دو مثال از حرکت را ذکر مینمائیم .

ا ـ حالتی که در آن متحرك بحرکتی مستقیم الخط متحرك بوده و تحت اثر قوه $F=m\gamma$ که در امتداد و جهت تغییر مکان است واقع باشد.

فرض میکنیم متحرك از نقطه O در لحظه $t=0$ با سرعت v_0 حرکت نموده و در لحظه t با سرعت v بنقطه M برسد دو دستور $OM=x=v_0t+\frac{1}{2}\gamma t^2$ و $v=v_0+\gamma t$ را قبلا بدست آورده ایم: طرفین دستور اول را مجذور مینمائیم نتیجه میشود:

$$v^2=v_0^2+2v_0\gamma t+\gamma^2t^2=v_0^2+2\gamma(v_0t+\frac{1}{2}\gamma t^2)=v_0^2+2\gamma x.$$

و یا

$$\frac{v^2-v_0^2}{2}=\gamma x$$

x
V
M
V_0
O
x'

س ۴۹

و چون طرفین را در جرم m ضرب نمائیم:

$$\frac{mv^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=m\gamma x=F.x=T_F$$

از این دستور حکم قضیه نتیجه میگردد.

ب ـ حالتی که در آن متحرك وزین (بوزن P) در لحظه $t=0$ از نقطه O با سرعت v_0 در خلاء پرتاب شده، فرض میکنیم در لحظه t نقطهٔ M وضع متحرك و v سرعت آن باشد دستور ذیل حاصل میگردد:

$$v^2=v_0^2-2g(z-z_0)$$

و یا

$$\frac{v^2}{2}-\frac{v_0^2}{2}=-g(z-z_0)$$

وبالاخره

$$\frac{mv^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=-mg(z-z_0)=T_P$$

از این دستور نیز حکم قضیه استنباط میگردد

z
V
M
S
V_0
$P=mg$
O
z_0
z'

س ۵۰

ثانیا ـ حالت کلی را ذکر مینمائیم ـ

در لحظه t متحرك M بجرم m تحت تاثیر قوه متغیر (F) منتجه جمیع قوای وارده قرار گرفته.

ا ـ شکل فاضلهٔ فرس ویو ـ اتحاد اصلی $(F)=m(\Gamma)$ را در لحظه t برمماس وارد برمسیر تصویر مینمائیم نتیجه میشود

$$F_n=m\gamma_n$$

در معرفة الحرکات دستورهای $v=\frac{ds}{dt}$ و $\gamma_t=\frac{dv}{dt}$ را بدست آورده ایم بنابر این چنین خواهیم داشت

$$F_t=m\frac{dv}{dt}$$

F_t
Γ_t
S
M
Γ
F

س ۵۱

طرفین تساوی را در تغییر مکان جزئی ds که متناظر با زمان dt است ضرب مینمائیم نتیجه میشود:

$$F_t\,ds=m\frac{dv}{dt}ds=m\frac{ds}{dt}dv=mvdv$$

اما $F_t\,ds=T_eF$ یا dT

و $mvdv=d\frac{mv^2}{2}$

بنا بر این چنین خواهیم داشت

$$d\frac{mv^2}{2}=dT \qquad (۱)$$

اینرابطه **شکل فاضله** قضیه فرس ویو است و آنرا باین عبارت بیان مینمایند.

بازاء نمو dt از زمان نیمه فرس ویو نقطهٔ مادی برابر کار جزئی قوه وارد باین نقطه است.

ب ـ شکل جامعه فرس ویو ـ ازطرفین دستور (۱) استخراج تابع اولیه نموده مقدار آنرا بین دو زمان t_0 و t که بازاء آنها سرعت متحرك برابر v_0 و v است حساب میکنیم حاصل میگردد:

$$\int_{t_0}^{t} d\frac{mv^2}{2}=\frac{mv^2}{2}\Big|_{t_0}^{t}=T$$

و یا

$$\frac{mv^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=T$$

و از این رابطه حکم قضیه نتیجه میگردد

۵۰ ـ مورد استعمال ـ حرکت نقطه مادی وزینی که بوسیله مرکز ثابت O متناسب با فاصلهٔ اش جذب میگردد و آنرا بدون

سرعت اولیه در نقطه M_0 رها نموده اند.

مسیر خطی است که بر نقطه M_0 و مرکز جاذبه مرور مینماید، قوهٔ جاذبه مزبور عبارت از $F=mk^2x$ میباشدبفرض آنکه

س ٥٢

x فاصله متحرك از مرکز جاذبه و k^2 مقدار ثابتی باشد، کار قوه عبارت است از:

$$T=-\frac{1}{2}mk^2(x^2-x_0^2)$$

از قضیه‌فرس‌ویو نتیجه میگردد $v^2=-k^2(x^2-x_0^2)$

و یا $v=\pm k\sqrt{x^2-x_0^2}$

و این مقدار سرعت متحرك مزبور است.

تمرینات

۵۷ـ نقطه مادی M برامتداد بزرگترین‌شیب صفحه مایلی که با افق زاویهٔ α دارد دارای لغزش با اصطکاك است (جهت مثبت بطرف پائین است)

اولا ـ درمبداء زمان نقطه با سرعت v_0 بطرف بالا پرتاب شده و در لحظه t_1 به نقطه O_1 رسیده و سرعتش در این موقع صفر میگردد

ا ـ $f=0,5$ ضریب اصطکاك‌لغزش‌است زاویهٔ α بایددارای‌چه شرطی باشد تانقطه متحرك در O_1 متوقف نشود

ب ـ جرم‌نقطه برابریك کیلوگرام است شتاب‌ثقل ۹,۸۱ متر میباشد بازاء $\alpha=40$ ۲۰ — متر در ثانیه$=v_0$ تصاویر t_1 و$\overline{OO_1}$ وکار متناظربافوه اصطکاك راتعیین‌کنید

ثانیا ـ زاویهٔ α برابر مقدار ثابت 40^0 باقی میماند، نقطهٔ M از O در مبداء زمان با سرعت صفر رها شده و در لحظه $t=0$ متحرك دیگر M' بدون اصطکاك بر امتداد Ox نیز با سرعت صفر رها گردیده مقصود تعیین لحظه t_1 است که در آن M' با M تلاقی مینماید و محاسبه مسافت مطویه متناظر با زمان مزبور.

۵۸ـ عملهٔ میله چرخی بشعاع ۳۰ سانتیمتر را حرکت میدهدو دقیقهٔ ۵۰ دور آنرا میگردانند قدرت متوسطه عمله ۸ کیلوگرم است مقصود تعیین کاری است که در یکدقیقه انجام میدهد.

۵۹ـ نقطه مادی M بوزن P برابر یك کیلوگرم مجذوب نقطه ثابت A بوسیلهٔ قوهٔ متناسب با فاصلهٔ AM میباشد، جاذبه درفاصله یکمتری برابر وزن P نقطه M است

اولا ـ ثابت کنید منتجه قوای P و F در جمیع اوضاع نقطه M بر نقطه B واقع در روی قائم A گذشته و متناسب با فاصلهٔ BM است ـ مقدار قوه جاذبه برای وقتی که BM برابر یك متر باشد چیست

ثانیا ـ مقصود محاسبه کار منتجه مزبور است وقتی نقطه M نیمدائره $B'MB$ بمرکز A و شعاع AB را سیر نماید B' نقطه متقاطر B است

ثالثا ـ مقصود محاسبه کار همین منتجه است وقتی M بر قطعه مستقیم $B'B$ سیر نماید

۶۰ـ صفحه بدو محور متعامد Ox و Oy نسبت داده شده

اولا ـ نقطه مادی M درجهت مستقیم بر محیط دایره بمرکز O وشعاع یك‌سانتیمتر سیر مینماید بر این نقطه قوه F متناسب با فاصله M از Ox اثر مینماید وقتی M در نقطه B است قوه مزبور برابر ٤ دین میباشد و جهت آن بقسمی است که با MO زاویهٔ که OM با Oy دارد ایجاد مینماید

مقصودتعیین کار جزئی قوه F در تغییر مکان MM' نقطه بر دائره است برای این منظور فرض میکنیم

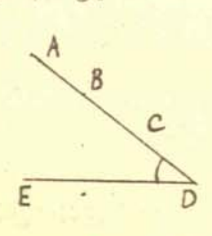
$$(OX,OM)=\frac{\alpha}{2}\quad\text{و}\quad MM'=\frac{\Delta\alpha}{2}$$

مشتق کار را بحسب α تعیین نموده و کار F را وقتی M بر هر یك از چهار ربع AB و BA' و $A'B'$ و $B'A$ حرکت میکند معلوم کنید

س ٥٣

ثانیا ـ اگر فرض‌کنیم M تحت اثرقوه F ووزن خود، p دین باشد بقسمی که بدون اصطکاك داخل دائره‌مزبور حرکت کند وضمنا Oy در امتداد قائم اختیار شود آیا تعادل نقطه M ممکن است، در صورت امکان اوضاع آنرا تعیین نمائید

۶۱ـ نقطه مادی M را بجرم m بدون سرعت در نقطه A از صفحه مایلی که با افق زاویه i را ایجاد کرده گذاشته اند، AD بزرگترین شیب متناظر بانقطه A است، B و C دونقطه از همین‌خطاند بقسمیکه $AB=BC=CD=l$ قسمت AB کاملا صیقلی است قسمت BC ضریب اصطکاکی برابر $f=tgi$ دارد و قسمت CD دارای ضریب اصطکاکی برابر $f=2tgi$ میباشد مقصود تعیین تغییرات فرس ویو نقطه وزین است وقتی بر هر یك از تقسیمات حرکت کند



س ٥٤

۶۲ ـ جسمي ۴۰ کیلوگرمی از تحت بفوق با سرعت اولیه ۵۰۰ متر در ثانیه که با افق زاویه 45^o دارد پرتاب شده ، مقصود تعیین کار قوای خارجی است که بر نقطه وارد شده آنرا درنقطه اوج متوقف سازند

۶۳ ـ دوچرخه سواري جاده افقی را با سرعت ۸ کیلومتر در ساعت طی مینماید و با این سرعت به قسمتي ازجاده میرسد که شیب آن در هرمتری ۲ سانتیمتر تغییر مینماید، از این لحظه ببعد دوچرخه سوار رکاب را نمیگرداند

اولا ـ مقدارسرعت دوچرخه سوار وقتی بر این جاده ۵۰ متر سیرنمایدچقدر است

ثانیا ـ زمان سیر ۵۰ متر را تعیین نمائید، بدوا مسئله را بفرض آنکه اصطکاك صفر باشد حل نموده سپس فرض میکنیم اصطکاك بصورت قوه یك کیلوگرمی در جهت مخالف سرعت وارد گردد

وزن دوچرخه ودوچرخه سوار ۸۰ کیلوگرماست شتاب ثقل ۹,۸ آحاد طول وزمان متر و ثانیه میباشد

۶۴ ـ نقطه مادي وزيني درلحظه $t=0$ برخط بزرگترین شیب صفحهٔ بمیل α پرتاب شده ، سرعتش بطرف تحت متوجه بوده و مقدار عددي آن v_0 است ضرب اصطکاك f است مقصود محاسبه سرعت در لحظه t است ، چه شرطی باید موجود باشد تا نقطه متوقف گردد فرض میکنیم شرط مقرر باشد، مقصود تعیین تغییرات زمان Θ است که مابین مبداء زمان و زمان توقف فاصله میگردد بحسب α

با همین مفروضات کار عکس‌العمل صفحهٔ را از مبداء زمان تا موقع توقف حساب کنید باچه سرعتی بایدجسم را ازنقطه توقف پرتاب کردتانقطه‌عزیمت بدوی‌خودرسیده‌ومتوقف‌گردد

۶۵ ـ متحرکی بر افقیه Ox سیر مینماید ، طول $OA=l$ را در دو فاصله متوالی بطریق ذیل طي مینماید

در فاصله اول از O بدون سرعت اولیه حرکت کرده و داراي حرکت متشابه التغییر مسرعه است و شتابش مثبت و برابر γ_1 میباشد

در فاصله دوم پس از زمان نامعلومی متحرك دارای حرکت متشابه التغییر مبطئه شده و شتابش $-\gamma_2$ میگردد (γ_2 مثبت است) سرعت متحرك در ابتدای فاصله دوم برابر سرعت آن در آخر فاصلهٔ اولی است

میدانیم متحرك باید در نقطه A بدون سرعت باشد مقصود تعیین ازمنهٔ متناظر با دو فاصله مزبور و طول هر یك از آنها است

بفرض آنکه متحرك بجرم m باشد چه قوائی در دو فاصله بمتحرك وارد میشوند و کار آنها چقدر است

مثال عددی : $l=$ ۸۰۰ سانتیمتر و $\gamma_1=$ ۰,۸ و $\gamma_2=$ ۰,۲ و $m=$ ۱۰۰۰ گرم

۶۶ ـ گلولهٔ وزینی بدون سرعت درنقطهٔ A مجاور نقطه اوج دائره قائمی رها شده ، در چه نقطه از محیط دائره جدا میشود

۶۷ ـ دائره قائمی مفروض است با چه سرعتی باید از نقطه حضیض متحرك وزین M را پرتاب نمود تا یك دور کامل بزند

۶۸ ـ نقطه‌وزینی ازنقطه حضیض دائره‌قائمی واز داخل‌آن باسرعت‌اولیه v_0 پرتاب شده

اولا ـ آیا بنقطه B که شعاع نظیر آن با قائم‌زاویه α ایجاد مینماید ممکن است برسد

ثانیا ـ فشاری را که در وضع B متحرك بر دائره وارد میسازد حساب کنید

ثالثا ـ بفرض آنکه $OA=$ ۱۲ متر مقصود تعیین سرعت اولیهٔ است که بازاء آن متحرك بنقطه A یعنی اوج دائره واصل گردد بنا بر آنکه فشار آن اقلا برابر $\frac{1}{4}$ وزنش باشد ، اصطکاك صفر و $g=$ ۹,۸۱

س ۵۵

فصل پنجم

استاتیك اجسام صلب آزاد

مرکز ثقل

۵۱ ـ چنانکه میدانیم **وقتی یکدسته نقاط مادی بحال تعادل اند حاملهای نمایش قوای خارجی وارد باین نقاط تشکیل دستگاهی معادل با صفر میدهند .**

برای آنکه چنین حالتی اتفاق افتد لازم و کافی است که منتجه انتقالی و عزم مجموع دستگاه نسبت بیك نقطه برابر صفر باشد ، اما برای آنکه حاملی صفر شود لازم و کافی است که تصاویر آن بر سه محور متعامد صفر باشد ، بنا بر این برای بیان آنکه دستگاهی معادل با صفر است باید شش تساوی نوشت .

برای برقراری شرایط فوق میتوان بجای دستگاه حاملهای نمایش قوای خارجی دستگاه های معادل با آنهارا قرارداد ، بخصوص میتوان هر یك از

حاملهای نمایش قوای مزبور را بر محمل خود لغزش داد تا مثلا مبدأش یکی از نقاط مادی دسته نقاط مفروض گردد.

اما پس از چنین عملی باید دانست که در حالت داخلی جسم تغییری حاصل میگردد، همچنین است اگر در صورت امکان مبداء جمیع قوای خارجی را بر یکی از نقاط مادی مزبور قرار دهیم، اعمال نسبی نقاط دستگاه پس از چنین تبدیلی تغییر مینماید.

بهمین جهت است که اگر در حالت مخصوص و سادهٔ تیغهٔ AB تنها

س ٥٦

تحت اثر دو قوه F و ′F وارد بر نقاط A و B قرار گیرد، برای آنکه بحال تعادل باقی بماند لازم است قوای مربور متقابل باشند. اگر بجای ′F قوه F_1' را قرار دهیم یعنی F_1 را باندازه BC بلغزانیم حالت تعادل تیغه بهم نمیخورد ولی قطعه CB تحت هیچگونه اثری نبوده بنا براین حالت داخلی تیغه تغییر مینماید

٥٢ ـ اجسام لایتغیر ـ اجسام طبیعی ـ تعریف ـ جسم را لایتغیر میگوئیم وقتی مرکب از نقاط مادی باشد که فواصل نسبی آنها ضمن تاثیر قوای وارده تغییر ننماید.

تنها اختلاف بین این اجسام و اجسام هندسی مفروض در معرفة‌الحرکات این است که در اینجا نقاط مشکل اجسام با جرم ملاحظه میشوند.

اجسام لایتغیر نیز مانند نقطه مادی وجود حقیقی ندارند، اجسام طبیعی تحت اثر قوای وارده ممکن است هرگونه تغییر شکل بدهند، منتها تغییر شکل بعضی از آنها مانند کائوچوك، فنر، نخ و امثال آنها بوسیله قوائی ضعیف تر و برخی دیگر مانند سنگ، چوب و فلزات بواسطه اثر قوائی قوی تر بمعرض ظهور میرسد.

اما زمانی که این تغییر شکل ها نامشهود باشند آنها را معدوم تصور میکنیم، اگر بر صفحه افقی صیقلی و مقاوم از مرمر گلولهٔ از عاج را که بوسیله دوده اندود شده باشد بیاندازیم، جای نقطه لکه سیاه مستدیری روی میز مشاهده خواهیم نمود، در مقابل ملاحظه میکنیم که عراقیه کروی کوچکی از گلوله فاقد رنك سیاه میباشد، بهمین سبب است که میتوانیم بگوئیم در موقع تصادم گلوله با صفحه میز، گلوله و یا هر دو تغییر شکل هائی میدهند و نتیجه آن این است که در اینموقع قسمت مشترك آنها نقطه نبوده بلکه سطح است. چنانچه قوای موجده تغییر شکل کمتر از حدودی باشند بقسمی که جسم پس از رفع قوی بحالت اولیه خود عودت بنماید گویند جسم در حالت ارتجاع است و اگر برخلاف قوای مزبور ازحدود مذکور متجاوز گردند تغییر شکل جسم پس از رفع قوی اقلا در یکی از قسمتهای آن مشهود خواهد بود

برای اجسام نرم مانند خمیر و روغن و امثال آنها دورهٔ ارتجاع وجود ندارد، اجسامی که شرایط تعادل آنها را تحقیق میکنیم اجسامی هستند که قوای وارده آنهارا از دورهٔ ارتجاع خارج مینماید ویا تغییر شکل آنها تحت اثر قوی غیر قابل ملاحظه است.

٥٣ ـ اجسام آزاد ـ اگر جسمی طبیعی نسبت بزمین بحال تعادل باشد هرگز آزاد نیست بلکه همواره بواسطه اجسام دیگر غیر آزاد میباشد، اگر جسم S در نقطه A با جسم ′S تماس داشته باشد تعادل را ممکن است با حذف جسم ′S برقرار نمود باینطریق که در نقطه A قوه که حقیقة همان عکس‌العمل ′S نسبت به S است اختیار کرد.

باین ترتیب همواره میتوان جسم را آزاد دانست مشروط باینکه بجای اجسامی که با آن تماس دارند قوائی را که عکس العملهای آنها در نقاط تماس هستند قرار داد.

از شرایط تعادل جسم آزاد چنین مستفاد میشود که بعضی اوقات میتوان بجای قوای وارده بدان قوای دیگری اختیار نمود بدون آنکه در حالت

سکون یا حرکت جسم تغییری عارض گردد، نتیجه این است که شرط تعادل جسم غیر آزاد را نیز میتوان با ملاحظه قوای ارتباطی بتعادل جسم آزاد راجع کرد.

حال میگوئیم اگر در حالت سکون یا حرکت جسم با بطور کلی رشته نقاط مادی تغییری ندهیم، حالت خارجی جسم نیز تغییر نمی نماید، ولی این نکته را نیز باید متوجه بود که وقتی قوای مختلفه وارده بر جسمی را بقوای دیگری تبدیل میکنیم غالبا حالت داخلی آن تغییر مینماید.

۵۴ـ اصل کلی در استاتیك جسم ـ بجای آنکه در قضایای استاتیك جسم صلب را مرکب از نقاط مادی فرض کنیم که فواصل نسبی آنها لایتغیر اند، بهتر آنست که بوسیله خاصیت دیگری که خود تعریف جدیدی از جسم صلب است آنهارا بشناسیم، این اصل نیز مانند سایر اصول جر ثقال مبنی بر تجربه و مشاهده است.

برای آنکه حالت خارجی جسم صلبی بافزایش یا کاهش دو قوه تغییر ننماید لازم و کافی است که قوای مزبور متقابل باشند.

بخصوص اگر بدو نقطه A و B از جسم صلبی دو قوه بیافزائیم و بحال تعادل باقی بماند لازم و کافی است که قوای مزبور دارای خط اثر AB بوده بعلاوه مقدارشان مساوی و جهتشان مختلف باشد.

ش ۵۷

اولین نتیجه اصل فوق این است که همواره ممکن است قوه F وارده بر نقطه A از جسمی را بقوه F′ وارد به نقطه دیگر B متعادل با F تبدیل نمود، بدون آنکه در حالت خارجی جسم تغییری حاصل گردد، زیرا همواره ممکن است قوای F′ و F″ را که اولی متعادل F و دومی متقابل

F′ است بجسم اضافه نموده و پس از آن بدون آنکه تغییری در حالت خارجی جسم حاصل شود دو قوهٔ متقابل F و F′ را حذف کرد و بالاخره قوهٔ F را بقوه F′ تبدیل نمود.

۵۵ـ تبدیل قوای وارده بجسم ـ ا ـ تبدیل یك قوه بسه قوه که بر نقاط اختیاری A و B و C از جسمی وارد شوند،

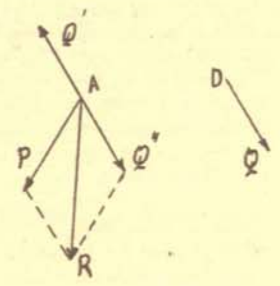
A و B و C را سه نقطه غیر واقع بر یك استقامت از جسمی اختیار مینمائیم بنا بر استدلالی که راجع بحاملها (کتاب اول نمره ۲۰ قضیه ۱) کردیم میتوان بدون آنکه حالت خارجی جسم تغییر نماید قوه معلوم F را بسه قوه که بنقاط A، B و C وارد شده اند تبدیل نمود.

تبصره ـ در حالت مخصوصی که نقطه M در صفحه H مار بر نقاط A و B و C واقع باشد و ضمنا F بر این صفحه منطبق نباشد باید بوسیله لغزش، نقطه تعلیق قوهٔ F را از صفحه H خارج نموده برنقطه دیگری از جسم که غیر واقع در این صفحه باشد قرار داد، چنانچه جسم غیر از M نقطه دیگری بر امتداد خط اثر F نداشته باشد این عمل غیر ممکن میشود ولی اینحالت وقتی اتفاق میافتد که جسم را فقط از یك ورقه مستوی فرض نمائیم. در اینصورت ملاحظه میکنیم که تعادل چنین جسمی وقتی برقرار است که قوای وارده در صفحه آن واقع باشند زیرا اگر F منتجه جمیع قوای خارجی واردهٔ بر نقطه M از ورقه مزبور باشد شرط تعادل نقطه مزبور این است که قوهٔ F متقابل با منتجه عکس العملهای نقاط مختلفه ورقه باشند اما قوای اخیر همه در صفحه ورقه واقع اند پس منتجه آنها نیز در همین صفحه بوده لازم میاید F نیز در این صفحه واقع باشد.

ب ـ تبدیل دو قوه که یکی از آنها بر نقطه اختیاری از جسم وارد شود ـ میتوان قوای وارده بجسمی را بسه قوه AU و BV و CW که بسه نقطه A و B و C وارد شده اند تبدیل نمود و چنانکه میدانیم (کتاب اول نمره ۲۰ قضیه ۲) همواره بدون آنکه در حالت خارجی جسم تغییری

حاصل گردد میتوان قوای مزبور را بدو قوه که یکی از آنها مثلا P بر نقطه اختیاری A و دیگری Q که بر نقطه دیگری مانند D وارد شده تبدیل نمود .

ج - تبدیل بیك قوه وارد به نقطه اختیاری از جسم و یك زوج .
میتوان بدون آنکه تغییری در حالت خارجی جسم رخ دهد جمیع قوای وارده بدان را بیك قوه واحد که بر نقطه معین A در جسم وارد شده و یك زوج مبدل ساخت ، زیرا همواره میتوان قوی را بدو قوه P و Q تبدیل نمود حال چون قوای متقابل Q' و Q'' را که اولی با Q تشکیل زوج میدهد بنقطه A از جسم وارد کنیم حالت خارجی جسم تغییر نمیکند ، سپس Q'' و P را به منتجه آنها یعنی R تبدیل مینمائیم . درنتیجه قوای وارده به قوه R و زوج (Q' و Q) تبدیل میشوند.



س ۵۸

۵۶ - شش شرط لازم برای تعادل یکدسته نقاط مادی درمورد جسم صلب کافی میباشند - فرض میکنیم جسم صلبی بحال سکون باشد میتوان بر آن قوای خارجی که تشکیل دستگاهی معادل با صفر میدهند وارد نمود ، حال ثابت میکنیم جسم تحت اثر این قوی بحال تعادل باقی میماند .

میتوان بدون آنکه تغییری در حالت خارجی جسم ایجاد شود قوای مزبور را بدو قوه P و Q که بدو نقطه A و B وارد شده اند مبدل ساخت این دوقوه باید تشکیل دستگاهی معادل صفر بدهند بنا براین باید متقابل باشند اما جسم بدوا بحال سکون بود پس در ضمن ورود قوای P و Q نیز بهمین حالت باقی میماند .

حالت مخصوص - ۱ - جسمی که تحت اثر سه قوه است -
چنانکه میدانیم (کتاب اول نمره ۳۵ قضیه) شرط تعادل جسمی تحت اثر سه قوه چنین است :

باید خطوط اثر قوای مزبور دریك صفحه واقع باشند ، مجموع مقادیر جبری تصاویر قوای مزبور بر دومحور واقع در این صفحه برابر صفر گردد ، مجموع مقادیر جبری عزمهای قوی نسبت به محور عمود براین صفحه مساوی صفر شود .

ب - جسمی که تحت اثر قوای واقع در یك صفحه است -
بطور کلی قوای وارده برجسمی را که دریك صفحه واقع باشند میتوان بیك قوه واحد موسوم به منتجه بدل ساخت .

شرایط تحلیلی تعادل در اینصورت چنین است : **مجموع مقادیر جبری تصاویر قوی بر دومحور واقع در صفحه آنها وهمچنین مجموع مقادیر جبری عزمهای آنها نسبت بمحوری عمود برصفحه مزبور برابر صفر است .**

مرکز ثقل

۵۷ - اگر A_1 و A_2 و A_3 و .... و A_n نقاط مادی و m_1 و m_2 و m_3 و .... و m_n جرمهای این نقاط باشند ، فرض میکنیم نقاط مزبور تحت اثر قوائی باشند که شتاب آنها همواره همسنگ حاملی مانند γ باشد ، قوای مزبور موازی و متحد الجهت خواهند بود ، مرکز قوای متوازی مزبور نقطه G است بقسمی اگر قوای f_1 و f_2 و .... و f_n وارده بنقاط مفروض را بقوای دیگری متناسب با همین قوی ولی در جهت دیگری بدل کنیم نقطه G ثابت میماند .

نقطه G را مرکز ثقل دسته نقاط A_1 و A_2 و .... A_n میگویند .
برای یافتن این نقطه بهتر آنست که نقاط مفروض را دسته دسته کرد فرض میکنیم نقاط را بسه دسته S_1 و S_2 و S_3 تقسیم کرده باشیم بقسمیکه G_1 و G_2 و G_3 مراکز ثقل آنها باشد و M_1 و M_2 و M_3 جرم مجموع نقاط هر یك از دسته ها فرض شود .

قوای وارد بنقاط S_1 دارای منتجه $M_1(\gamma)$ میباشند که بنقطه G_1 وارد شده

و همچنین قوای وارد بنقاط دو دسته دیگر منتجه هائی مانند $M_2(\gamma')$ و $M_3(\gamma')$ دارند که بنقاط G_2 ، G_3 وارد شده اند ، مرکز سه قوه مزبور همان مرکز ثقل اجرام M_1 و M_2 و M_3 است .

حال ملاحظه میکنیم مرکز دو قوهٔ که بر نقاط A_1 و A_2 وارد شده نقطهٔ مانند B_1 مابین A_1 و A_2 است و همچنین مرکز دو قوه که بر نقاط B_1 و A_3 گذشته نقطه مابین B_1 و A_3 و ..... و بالاخره تا نقطه A_n از اینجا چنین نتیجه میشود که مرکز ثقل یکدسته نقطه داخل دوره یا سطحی است که شامل جمیع قطعات مستقیم واصل بین نقاط مفروض باشد .

برای تعریف مرکز ثقل جسم میتوان فرض کرد که قوای وارده بنقاط مختلفه آن همان اوزان این نقاط میباشند .

۵۸ ـ مختصات مرکز ثقل جسم ـ فرض میکنیم $p_1=m_1g$ و $p_2=m_2g$ و ..... و $p_n=m_ng$ اوزان نقاط مادی مشکل جسمی بوده و $P=Mg$ وزن آن باشد و (x_1,y_1,z_1) و (x_2,y_2,z_2) و ..... (x_n,y_n,z_n) مختصات نقاط مادی مزبور و (x,y,z) مختصات G مرکز ثقل جسم اختیار شوند برای محاسبه مختصات نقطه G قضیه عزم قوای متوازیه را نسبت بهریك از صفحات yoz و zox و yox (کتاب اول نمره ۳۰ قضیه) مراعات مینمائیم ، نسبت صفحه yoz نتیجه میشود :

$$P.x=p_1x_1+p_2x_2+\dots+p_nx_n$$

و یا پس از تقسیم طرفین بر g حاصل میشود

$$Mx=m_1x_1+m_2x_2+\dots+m_nx_n$$

وبالاخره :

$$x=\frac{\Sigma m_kx_k}{\Sigma m_k=M}$$

و همچنین

$$y=\frac{\Sigma m_ky_k}{M} \quad \text{و} \quad z=\frac{\Sigma m_kz_k}{M}$$

مرکز ثقل خطوط

۵۹ ـ مرکز ثقل خط ـ جسمی بشکل خط مثلا رشتهٔ فلزی اختیار مینمائیم ، جسم مزبور را وقتی متشابه الاجزاء میگوئیم که جرم قوسی از آن یعنی m متناسب با طول همین قوس یعنی l باشد بعبارهٔ اخری بین جرم وطول آن و جرم یك قطعه بطول واحد از آن یعنی d رابطهٔ $m=dl$ برقرار باشد.

مرکز ثقل خط متشابه‌الاجزاء به d بستگی ندارد چه اگر d را به d' تبدیل نمائیم مثل این است که جرم جمیع نقاط را در نسبت $\frac{d'}{d}$ ضرب کنیم یعنی بالاخره وزن این نقاط را در همین مقدار ضرب نمائیم ، پس مرکز ثقل چنین نقاطی تغییر نمی نماید .

بدیهی است اگرخطی دارای مرکز تقارن باشد مرکز ثقل آن بر همین نقطه است همچنین وقتی دارای محور یا صفحه تقارن باشد مرکز ثقل آن براین محور یا این صفحه قرار دارد.

بنا بر این مرکز ثقل هر قطعه خط بر وسط آن بوده و مرکز ثقل محیط دایره برمرکز دایره است ومرکز ثقل قوس دایره بر قطری که بوسط قوس مرور مینماید قرار دارد .

مرکز ثقل محیط مثلث ـ فرض میکنیم p وزن یك واحد طول ازمحیط مثلث ABC باشد بعبارهٔ اخری p مساوی حاصلضرب وزن مخصوص خطی مثلث در شتاب g فرض شود .

وزن ضلع AB برابر pAB بوده و مرکز ثقل آن بر وسط AB یعنی F منطبق است بنا براین مرکز ثقل مطاوب عبارت است از مرکز قوای متوازیه متحدالجهتی است که بر اوساط اضلاع مثلث وارد شده ومقادیرشان بترتیب pAB و pBC و pCA باشد مرکز دو قوه وارد بنقاط E و F نقطه H واقع بر خط EF است بقسمی که :

$$(HE)\times p\times AC+(HF)\times p\times AB=0$$

و یا
$$\frac{HE}{HF}=\frac{AB}{AC}$$

اما چون $AB=2DE$ و $AC=2DF$ پس
$$\frac{HE}{HF}=\frac{DE}{DF}$$

از رابطه اخیر چنین مستفاد میشود که H موقع منصف‌الزاویه D از مثلث EDF است بعبارةاخری: **مرکز ثقل محیط مثلث مفروض ABC مرکز دائره‌محاطی مثلثی است که از وصل اوساط اضلاع مثلث مفروض حاصل میگردد.**

مرکز ثقل خط غیر مشخص ـ چنانچه درخط غیر مشخصی منکسری محاط کنیم، مرکز ثقل این منکسر وقتی قوسهای متناظر با ضلع آن بسمت صفر میل نماید، بسمت حدی میل میکند که آنرا مرکز ثقل خط مزبور میگویند، ضمنا این نکته را متذکر میشویم که اگر وضع محاط کردن منکسر راتغییر دهیم‌مرکز ثقل‌خط تغییر نمینماید

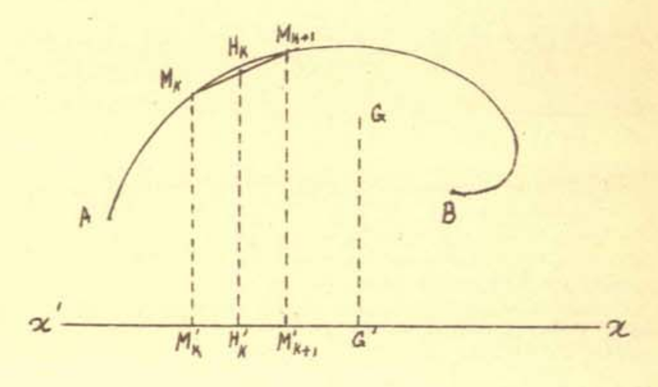
س ۵۹

۶۰ ـ قضیه اول گولدن ـ مساحت سطحی که از دوران‌خطی مستوی حول محوری واقع در صفحه خود ایجادمیگردد مساوی است بحاصلضرب طول خط مزبور در طول محیط دائرهٔ مسیر مرکز ثقل آن.

فرض میکنیم $AM_1M_2\dots M_{n-1}B$ منکسر محاط در قوس AB باشد که حول محور $x'x$ واقع در صفحه خط دوران مینماید.

وتر M_kM_{k+1} ضمن دوران سطح‌مخروط ناقصی ایجاد مینماید که‌مساحت آن برابر حاصلضرب طول محیط دایره مسیر نقطه H_k وسط قطعه مزبور است درطول مولد، چون H'_k را موقع عمود وارده از نقطه H_k بر محور فرض کنیم مقدار مساحت سطح مزبور چنین است
$$2\pi H_kH'_k\times M_kM_{k+1}$$

بدین ترتیب مساحت سطح حاصل از دوران منکسر مزبور حول‌محور بفرض آنکه H را وسط قطعه AM_1 و H' را تصویر این نقطه بر محور فرض کنیم چنین میشود
$$s=2\pi[H'H\times AM_1+H'_1H_1\times M_1M_2+\dots+H'_{n-1}H_{n-1}\times M_{n-1}B]$$
مقدار داخل کروشه عبارت از مجموع عزمهای اوزان اضلاع منکسر مزبور نسبت بصفحه ایست که بر xx' عمود بر صفحه منکسر مرور نماید



س ۶۰

اما این مجموع برابر عزم وزن منکسر نسبت بهمین صفحه است بفرض آنکه مرکز قوه مزبور نقطه g یعنی مرکز ثقل منکسر باشد، چون g' را تصویر g بر xx' فرض کنیم حاصل میشود:
$$s=2\pi l\times gg'$$

حال فرض میکنیم اضلاع منکسر محاطی بسمت صفر میل نمایند طول قوس AB بسمت حدی میل مینماید که همان حد l منکسر است همچنین حد نقطه g نقطه G میباشد و بالاخره حد سطح دوار بسمت سطح حاصل از دوران خط مفروض میل مینماید بنا بر این
$$S=2\pi GG'\times L$$

مورد استعمال ـ چنانچه مقدار سطح حاصل از دوران قوس AB معین باشد میتوان فاصله مرکز ثقل مزبور را ازمحور دوران معین نمود و اگر بالعکس مرکز ثقل قوس AB معین باشد بوسیله حکم فوق مساحت سطح دوار را میتوان حساب کرد، اینك چند مثال ذکر مینمائیم.

ا ـ مرکز ثقل قوس دائره ـ چنانچه AB قوسی از دائره بمرکز O ولی کمتر از نیمهٔ محیط باشد و C وسط قوس و $y'y$ محور دوران و بموازات AB اختیار شود چون سطح حاصل از دوران قوس AB عبارت از منطقه کروی است پس چنین خواهیم داشت

$$S=2\pi\times AB\times R$$

مرکز ثقل قوس AB بر قطر OC که محور تقارن قوس است قرار دارد

بنا بر قضیه گولدن نتیجه میشود:

$S=2\pi\times OG\times$ قوس AB

از مقایسه دو تساوی معلوم میشود:

$OG=\frac{R\times AB}{\text{قوس } AB}$

میتوان تساوی فوق را بصورت $OG=\frac{AB}{\alpha}$ نیز نوشت بنا بر آنکه α مقدار زاویه AOB بحسب رادیان باشد

س ٦١

ب ـ مساحت سطح حلقه ـ حلقه از دوران دایره حول محوری واقع درصفحه آن ایجاد میشود، اگر C مرکز دایره و R شعاع آن و O موقع عمودی باشد که از C بر محور فرود میاید سطح حاصل از دوران دایره حول محور چنین است

$S=2\pi.OC\times 2\pi R$ و یا $S=4\pi^2\times R\times OC$

اگر ملاحظه کنیم که $2\pi OC$ محیط مدار متوسط حلقه است نتیجه میشود

که سطح حلقه حاصلضرب طول محیط دایرهٔ مولد آن است در طول محیط مدار متوسط.

٦١ ـ مرکز ثقل سطح مستوی ـ جسمی بشکل ورقهٔ مستوی فرض میکنیم جسم مزبور را در صورتی متحدالاجزاء میگوئیم که جرم یك جزء از آن متناسب با مساحت آن قطعه یعنی s باشد بعبارة اخری بین آنها رابطهٔ $m=sd$ برقرار شود بقسمی که d مساوی وزن مخصوص جسم یعنی برابر جرم قطعهٔ از ورقه باشد که مساحتش مساوی‌واحد مساحت است بهمان دلیل که راجع بخط ذکر شد معلوم میشود که مرکز ثقل سطح متحد الاجزاء فقط بستگی بشکل‌دورهٔ که آنرا محدود مینماید دارد نه بنوع مادهٔ مشکله آن و بهمین جهت است که میگویند مرکز ثقل سطح مستوی

اگرسطحی مستوی دارای مرکزتقارن باشد این نقطه مرکز ثقل آن سطح است مثلا مرکز ثقل سطح دایره همان مرکز دایره است.

قطر ـ خط D را نسبت باوتار موازی با d وقتی قطر سطح محدودبوسیلهٔدورهٔ C میگویندکه جمیع اوتارمحصور درمنحنی C و بموازات d بوسیلهٔ خط D بدو قسمت متساوی تقسیم‌شوند.

وقتی سطح‌مستوی محدودی دارای قطر باشد مرکز ثقل آن برهمین‌خط قرار دارد.

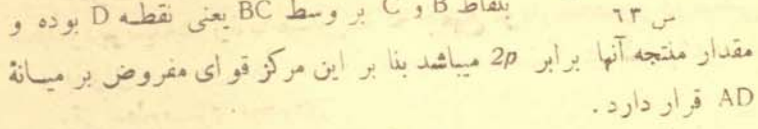
بدون‌آنکه حکم فوق‌را استدلال کنیم نکته ذیل‌را متذکرمیشویم ورقهٔ‌مستوی را بوسیله‌خطوطی بموازات d بتقسیمات عدیده تجزیه‌مینمائیم بقسمی که هریك از تقسیمات حاصل بشکل خطی باشد، مرکز ثقل هریك از این قطعات بروسط آنها یعنی بر قطر D واقع

س ٦٢

است وزن قطعات مزبور قوای متوازی و متحد الجهتی میباشند که بنقاط مختلفه D وارد شده اند مرکز آنها نیز بر همین خط است، این نقطه مرکز ثقل ورقه است.

بخصوص اگر سطحی مستوی محور تقارن داشته باشد، این خط قطری از شکل است که جمیع امتدادهای عمود بر خود را نصف میکند.

۶۲ - مرکز ثقل سطح مثلث - قضیه - مرکز ثقل سطح مثلث نقطهٔ تلاقی میانه های آن است. زیرا هر یك از این میانه ها نسبت بضلعی که بر آن وارد شده اند قطری از سطح مثلث اند پس نقطه تلاقی آنها مرکز ثقل سطح است بنا بر این مرکز ثقل مثلث بر یکی از میانه ها و بفاصله ثلث همین میانه از وسط ضلع متناظر با آن قرار دارد



س ۶۳

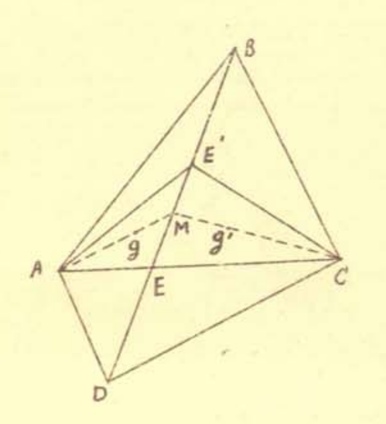
تبصره - سه قوه مساوی موازی و متحد الجهت وارد بر رؤس مثلث ABC فرض میکنیم، p را مقدار مشترك آنها اختیار مینمائیم مرکز قوای وارد بنقاط B و C بر وسط BC یعنی نقطه D بوده و مقدار منتجه آنها برابر $2p$ میباشد بنا بر این مرکز قوای مفروض بر میانهٔ AD قرار دارد.

بهمین ترتیب معلوم میشود که مرکز قوای مزبور برمیانهٔ دیگر و درنتیجه بر محل تلاقی میانه ها واقع است بقسمی که میتوان گفت:

مرکز ثقل سطح مثلث برمرکز دستگاهی منطبق است مرکب از سه قوه متوازی و متساوی و متحد الجهت که بسه راس مثلث وارد شده باشند.

۶۳ - مرکز ثقل سطح چهار ضلعی محدب - وزن چهار ضلعی ABCD مرکب از اوزان مثلثات ABD و BCD است، اوزان این مثلثات به نسبت مساحات آنها است ولی چون در یك ضلع مشترك اند مساحات آنها متناسب با ارتفاعات وارد بر این ضلع مشترك است ولی ارتفاعات فواصل

نقاط A و C از BD میباشند پس نسبت مزبور مساوی نسبت قطعات AE و CE میباشد، بنا بر این تعیین مرکز ثقل چهارضلعی منجر میشود به تعیین مرکز قوای متوازیه متحد الجهت و متناسب با طولهای AE و CE بقسمی که بنقاط g و g' یعنی مرکز ثقل مثلثات ABD و ACD مرور نموده باشند.



س ۶۴

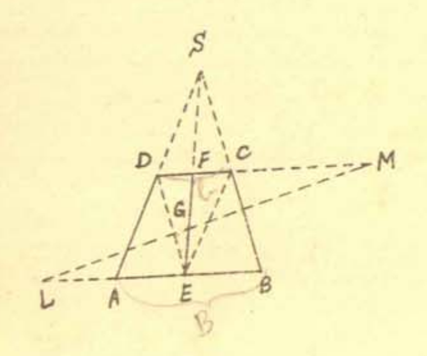
فرض میکنیم E' قرینهٔ E نسبت بنقطه M وسط قطر BD باشد مرکز ثقل مثلث AEE' بر ثلث میانه AM واقع است بنا بر این بر مرکز ثقل مثلث ABD منطبق است همچنین نقطهٔ g' مرکز ثقل مثلث CEE' است.

اما مرکز ثقل سطح ACE' باین ترتیب معین میشود که مرکز دستگاه مرکب از اوزان دو مثلث AEE' و CEE' را تعیین نمائیم که بنقاط g و g' مرور کرده و متناسب بامساحات این مثلثات میباشند. این اوزان از طرف دیگر متناسب با ارتفاعات وارد از نقاط A و C بقاعده EE' و بنا بر این متناسب با قطعات AE و CE نیز میباشند. پس مرکز ثقل مثلث ACE' بر مرکز ثقل چهار ضلعی منطبق است.

یعنی مرکز ثقل سطح چهارضلعی محدب برمرکز ثقل سطح مثلثی منطبق است که یك ضلعش قطری از چهارضلعی وراس مقابل این قاعده قرینه نقطه تلاقی اقطار نسبت بوسط قطر دیگر باشد.

۶۴ - مرکز ثقل سطح ذوزنقه - بوسیله طریقه فوق میتوان مرکز ثقل سطح ذوزنقه را تعیین نمود ولی بنا برخاصیت این شکل مرکز ثقل آن کمی سهلتر معین میگردد:

قاعده AB را برابر B و قاعده CD را برابر b اختیار مینمائیم و فرض میکنیم E و F اوساط قواعد مزبور باشند وزن ذوزنقه را مرکب از اوزان مثلثات ADE و BCE و CED اختیار مینمائیم ، اوزان مزبور متناسب با مساحات این مثلثات میباشند ولی چون همه درارتفاع باذوزنقه مشترك اند مساحاتشان متناسب با قواعدآنها AE و BE و CD میگردد بقسمی که برای تعیین مرکز ثقل سطح ذوزنقه میتوان بجای اوزان مثلثات قوائی موازی و مساوی



س ۶۵

با اعداد $\frac{B}{2}$ و $\frac{B}{2}$ و b قرار دارد بنا بر آنکه بمراکز ثقل مثلثات نظیر خود وارد شده باشند وهریك از این قوی را نیز ممکن است بسه قوهٔ متساوی وارد بروس مثلثات متناظر تبدیل نمود ، چون قوای مزبور را با یکدیگر ترکیب کنیم معلوم میشود باید قوای متوازی وارد بنقاط A و B و C و D و E را با یکدیگر ترکیب نمود باین ترتیب : دو قوه وارد بروس A و B با کمیت $\frac{B}{6}$ و یك قوه وارد براس E با کمیت $\frac{B}{3}+\frac{b}{3}$ ودو قوه وارد بروس C و D با کمیت $\frac{B}{6}+\frac{b}{3}$ ، سه قوه اول دارای منتجه برابر $\frac{2B}{3}+\frac{b}{3}$ میباشند که بنقطه E وارد شده و منتجه دو قوه اخیر مساوی $\frac{2b}{3}+\frac{B}{3}$ بوده و بنقطه F وارد گردیده ، بالاخره از تالیف دو قوه اخیر که بنقاط E و F وارد میشوند مرکز ثقل سطح ذوزنقه یعنی نقطه G بر قطعه خط EF معین میگردد بقسمیکه

$$\frac{GE}{GF}=\frac{B+2b}{2B+b}$$

میتوان نقطه G را بدینطریق تعیین نمود : هریك از دوقاعده را درجهت مخالف

قاعدهٔ دیگر به طولی برابر همین قاعده امتداد میدهیم خط LM واصل بین دو انتهای این خطوط EF را در نقطه مطلوب G تلاقی مینماید بطریقیکه :

$$\frac{GE}{GF}=\frac{B+2b}{2B+b} \quad \text{و یا} \quad \frac{GE}{GF}=\frac{EL}{FM}$$

تبصره ـ میتوان مستقیما نیز اثبات کرد که مرکز ثقل ذوزنقه بر خط EF قرار دارد زیرا خط اخیر قطر ذوزنقه نسبت بهریك از دوقاعده است

قضیه دوم گولدن ـ حجم حاصل از دوران سطحی مستوی حول محوری واقع در صفحه آن بنابر آنکه از آن عبور نکرده باشد مساوی است بحاصلضرب مساحت سطح مزبور در محیط مسیر مرکز ثقل این سطح .

فرض میکنیم C منحنی حد سطح مستوی مفروضی و $x'x$ محوری واقع در صفحه سطح مزبور اختیار شود بقسمیکه دورهٔ سطح را تلاقی ننماید ، داخل سطح محصور در منحنی C مربعی چنان بنا میکنیم که اضلاعش بترتیب موازی و عمود بر $x'x$ باشد ، ضمنا قبول میکنیم که اگر ضلع این مربع بسمت صفر میل نماید : ۱ ـ سطح مستور از مربع هائی که داخل دورهٔ C واقع اند بسمت سطح داخلی C میل مینماید ب ـ حجم حاصل از دوران مربعهای مزبور بسمت حجم حاصل از دوران سطح میل میکند ج ـ مرکز ثقل مجموعهٔ مربعها بر مرکز ثقل سطح منطبق میگردد .

س ۶۶

حجم حاصل از دوران مربع ABCD تفاضل حجم دو استوانه است که در ارتفاع مشترك میباشند و دستور این حجم چنین است .

$$\pi EF(ED^2-EA^2) \quad \text{و یا} \quad \pi EF(ED-EA)(ED+EA) \qquad (1)$$

اگر O مرکز مربع مزبور و O' وسط EF باشد مجموع ED+EA برابر $2OO'$ میگردد و تساوی (۱) بدینصورت در میاید $2\pi OO'\times AB\times BC$

عبارت فوق برابر حاصل ضرب ۲π است در عزم قوهٔ نسبت بصفحه مار بر $x'x$ موافق امتداد $y'y$ عمود بر اینصفحه بنا بر آنکه قوه مزبور به نقطه O وارد شده و مقدارش برابر مساحت مربع ABCD باشد، پس مجموع احجام حاصل از دوران مربعهای داخلی سطح مفروض مساوی حاصلضرب ۲π است در عزمهای اوزان مربعات بفرض آنکه وزن واحد سطح برابر واحد قوه باشد اما مجموع این عزمها مساوی عزم وزن سطحی است که از مربعهای مزبور مستور است بقسمیکه اگر s را برابر مساحت سطح مزبور و g را مرکز ثقل آن اختیار نمائیم حجم حاصل چنین میشود

$$v = ۲\pi \,.\, gg' \times s$$

حال فرض میکنیم ضلع مربع بسمت صفر میل نماید حجم v بسمت V وسطح s بسمت S میل کرده و gg' بر GG' منطبق میگردد بطریقیکه دستور حجم چنین خواهد شد

$$V = ۲\pi \,.\, GG' \times S$$

مورد استعمال ـ ا ـ مرکز ثقل سطح نیمدائره ـ محور تقارن نیمدایره بقطر AB بر شعاعی واقع است که عمود بر همین قطر باشد، حجم حاصل از دوران نیمدایره حول قطر AB برابر $\frac{٤}{۳}\pi R^3$ است ازطرفی بموجب قضیه فوق حجم حاصل عبارت است از $۲\pi\, OG \times \frac{\pi R^2}{۲}$ بنا بر این

این تساوی حاصل است:

$$۲\pi OG \times \frac{\pi R^2}{۲} = \frac{٤}{۳}\pi R^3$$

یعنی

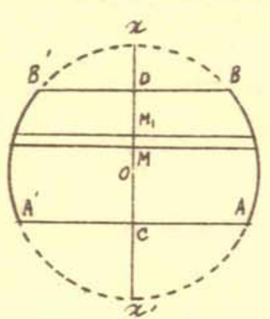
$$OG = \frac{٤R}{۳\pi}$$

ب ـ حجم حلقه ـ چون دایره حول محوری واقع در صفحه خود دوران نماید حجمی احداث مینماید که بموجب قضیه دوم گولدن مساحتش چنین است:

$$۲\pi a \,.\, \pi R^2$$

بفرض اینکه a فاصله مرکز دایره از محور بوده وضمنا از R بزرگتر باشد مقدار فوق برابر حاصلضرب سطح دایره مولد حجم است در محیط مدار متوسط سطح دوار

مثال ـ مرکز ثقل سطح منطقه کروی ـ سطح شکل را مار بر محور $x'x$ اختیار میکنیم که عمود بر دوائر حد منطقه است، سطح مزبور کره را در دایره عظیمه و صفحات حد منطقه را در اوتار AA' و BB' تلاقی مینماید. بر $x'x$ جهتی را مثبت اختیار کرده و مرکز کره را مبداء فرض میکنیم، فواصل مراکز دوقاعده منطقه را از O برابر c و d اختیار مینمائیم بنا بر آنکه $d>c$، منطقه را با صفحه عمود بر $x'x$ که به نقطه M بطول x از این محور گذشته قطع مینمائیم مرکز ثقل سطح منطقه محصور بین دوائر بمراکز C و M است بقسمیکه طول این نقطه تابعی از x خواهد بود، صفحه قاطع دیگری عمود بر محور اختیار میکنیم که در نقطه M_1 بطول x_1 این خط را قطع کرده باشد بقسمیکه $x_1>x$. S و S_1 را سطوح منطقه های متناظر با نقاط M و M_1 و X و X_1 را طول های مراکز ثقل این سطوح فرض میکنیم. وزن



س ٦٧

واحد سطح منطقه را برابر واحد قوه اختیار میکنیم، وزن منطقه S_1 عبارت از منتجه وزن های منطقه S و منطقه $S_1 - S$ است که محصور بین صفحات متناظر با نقاط M و M_1 میباشد. قضیه عزم حامل را نسبت بصفحه برای اوزان مزبور بموازات $x'x$ مراعات میکنیم، بفرض آنکه صفحهٔ ماخذ بر O گذشته و عمود بر $x'x$ باشد چنین نتیجه میشود:

$$(۱) \quad S_1X_1 = SX + (S_1 - S)u$$

بنا بر آنکه u طول مرکز ثقل منطقه بارتفاع MM_1 اختیار شود، بنا بر تبصرهٔ مذکور در نمره ۵۷، u مابین x و x_1 قرار دارد. در تساوی (۱) SX را بطرف اول نقل کرده طرفین را بر $x_1 - x$ تقسیم میکنیم نتیجه میشود

$$(۲) \qquad \frac{S_1X_1 - SX}{x_1 - x} = \frac{S_1 - S}{x_1 - x}u$$

حال فرض میکنیم x ثابت مانده x_1 بسمت آن میل نماید طرف اول

تساوی (۲) بطرف مشتق حاصلضرب SX میل خواهد کرد، u بسمت x میل مینماید ولی $S_1 - S$ مساحت سطح منطقه بارتفاع $x_1 - x$ است اگر R شعاع کره باشد حاصل میشود

$S_1 - S = ۲\pi R(x_1 - x)$ طرف ثانی تساوی (۲) بسمت $۲\pi Rx$ میل خواهد کرد بنا براین چنین نتیجه میشود

$$(SX)' = ۲\pi Rx \qquad (۳)$$

اما طرف ثانی عبارت از مشتق πRx^2 است بقسمیکه

$$SX = \pi Rx^2 + k$$

بازاء $x = c$ و $S = o$ حاصل میشود $k = -\pi Rc^2$ بنا بر این :

$$SX = \pi R(x^2 - c^2)$$

اما

$$S = ۲\pi R(x - c)$$

پس بالاخره

$$X = \frac{x + c}{۲}$$

چون x را مساوی d فرض کنیم طول مرکز ثقل منطقه $\frac{c + d}{۲}$ میگردد

یعنی بر وسط قطعه واصل بین مراکز قواعدش قرار دارد

چنانکه ملاحظه میشود مانند مسئله فوق میتوان مرکز ثقل بعضی سطوح را تعیین نمود همچنین ممکن است مرکز ثقل بعضی احجام را معین ساخت

۶۷ – مرکز ثقل حجم – جسم مفروض را وقتی متشابه الاجزاء میگویند که جرم جزئی از آن یعنی m متناسب با حجم این جزء یعنی v باشد بقسمیکه بین آنها رابطهٔ $m = vd$ برقرار گردد بنا بر آنکه d عدد ثابتی بوده یعنی مساوی وزن مخصوص جسم باشد یعنی d برابر جرم جزئی از جسم است که حجمش مساوی واحد اختیار شده .

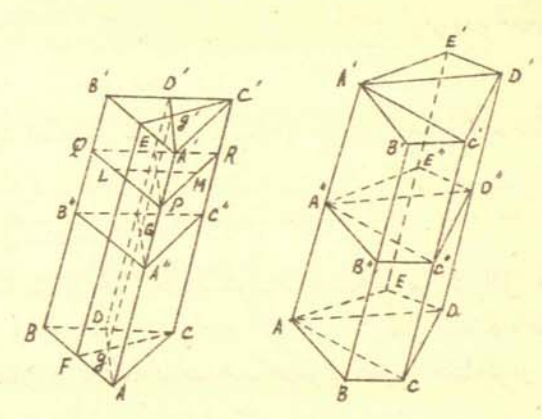
مرکز ثقل جسم متشابه الاجزاء بستگی بوزن مخصوص آن نداشته بلکه فقط بشکل آن بستگی دارد و بهمین جهت است که میگوئیم مرکز ثقل حجم

اگر جسمی مرکز یا محور تقارن داشته باشد مرکز ثقل آن بر این نقطه یا این خط منطبق است .

گویند جسمی محدود بسطح S موافق امتداد d دارای صفحه قطری P است هرگاه جمیع امتداد های موازی با d از سطح S بوسیله صفحه P نصف شوند ، اگر جسمی دارای صفحه قطری باشد ، مرکز ثقل آن بر همین صفحه قرار دارد ، زیرا میتوان جسم را مرکب از منشورهای بینهایت کوچکی تصور نمود که یالهای جانبی آنها بموازات امتداد d باشد مرکز ثقل هر یك از این منشورها که در حد بخطی منجر میشوند بر وسط این خطوط یعنی روی صفحه P قرار دارد پس لازم میاید که مرکز جمیع قوای نمایش اوزان منشورها نیز در صفحه P واقع گردد .

بخصوص اگر جسمی دارای صفحه تقارن باشد مرکز ثقل جسم بر همین صفحه است .

۶۸ – مرکز ثقل حجم منشور . قضیه . مرکز ثقل منشور بر وسط خطی واقع است که بین مراکز ثقل دو قاعده اش را وصل مینماید .



س ۶۸

۱ – منشور مثلث القاعده است – فرض میکنیم A'BCA'B'C' منشوری مثلث القاعده باشد صفحهٔ که بر AA' میانه مثلث ABC از نقطه A مرور مینماید صفحه قطری جسم موافق امتداد BC است بنابراین مرکز ثقل جسم بر این صفحه قرار

دارد بهمین طریق معلوم میشود مرکز ثقل جسم برصفحه واقع است که بر CC' و میانه CF مرور مینماید و در نتیجه نقطه مطلوب بر فصل مشترك این دو صفحه یعنی خط gg' قرار دارد که مراکز ثقل دو قاعده را بیکدیگر وصل مینماید ولی چون از طرف دیگر صفحهٔ که بر اوساط یالهای جسم یعنی نقاط A'' و B'' و C'' مرور میکند نیز صفحه قطری جسم موافق امتداد یالها است پس مرکز ثقل منشور بر وسط gg' قرار خواهد داشت بعبارة اخری بر مرکز ثقل مثلث $A''B''C''$ منطبق است .

ب - منشور غیر مشخص است - فرض میکنیم قاعده منشور کثیر الاضلاع محدب ABCDE باشد، آنرا بمثلثات تجزیه مینمائیم معلوم میشود مرکز ثقل منشور مرکز قوائی است که بمراکز ثقل مثلثات $A''E''D''$ و $A''D''C''$ و $A''C''B''$ و متناسب با حجم منشورهائی که بقاعده همین مثلثات میباشند وارد شده اند اما میتوان گفت که قوای مزبور متناسب با مساحات این مثلثات است پس مرکز ثقل جسم بر مرکز ثقل کثیر الاضلاع $A''B''C''D''E''$ منطبق است یعنی حکم محقق میگردد .

مورد استعمال - چون در استوانه منشوری محاط کنیم معلوم میشود که مرکز ثقل استوانه نیز وسط قطعه ایست که بین مراکز شکل دو قاعده آنرا وصل مینماید .

۶۹ - مرکز ثقل حجم هرم - قضیه - مرکز ثقل حجم هرم بر خطی واقع است که راس آنرا بمرکز ثقل قاعده وصل مینماید و این نقطه از قاعده بفاصله یکچهارم همین خط قرار دارد .

۱ - هرم مثلث‌القاعده است - ABCD چهار وجهی مفروض است صفحه که بر AD و نقطه K وسط BC مرور مینماید صفحه قطری جسم موافق امتداد BC است بنا براین مرکز ثقل جسم بر این خط قرار دارد ازطرف دیگر مرکز ثقل جسم برصفحه قطری دیگری که بر AC و نقطه E

وسط DB میگذرد واقع میباشد پس در نتیجه بر فصل مشترك این دو صفحه یعنی خط Ag واقع است که راس A را بمرکز ثقل مثلث BCD وصل مینماید، بهمین ترتیب معلوم میشود مرکز ثقل جسم برخط Dg' واقع است که نقطه D را بمرکز ثقل مثلث ABC وصل کرده از تشابه مثلثات Ggg' و GDA نتیجه میشود :

$$\frac{Gg}{GA}=\frac{gg'}{AD}$$

اما بنا بر تشابه مثلثات Kgg' و KDA حاصل میشود

$$\frac{gg'}{AD}=\frac{1}{3}$$

پس

$$\frac{Gg}{GA}=\frac{1}{3}$$

س ۶۹

یعنی نقطه G در ربع AG قرار دارد ؛ میتوان گفت که G مجانس g بوده و نسبت تجانس $\frac{3}{4}$ است

هرم غیر مشخص است - میتوان قاعدهٔ آنرا بمثلثات تجزیه نموده و جسم را بچند هرم تبدیل نمود مرکز ثقل هریك از این اهرام بر مرکز ثقل مثلثی واقع است که بموازات قاعده جسم و بفاصله $\frac{1}{4}$ ارتفاع از قاعده رسم شود بنا بر این مرکز ثقل هرم نیز بر مرکز ثقل مقطعی از جسم منطبق است که از راس بفاصله $\frac{3}{4}$ ارتفاع قرار داشته است

مورد استعمال - چون در قاعدهٔ مخروطی کثیر الاضلاعی محاط کنیم معلوم میشود مرکز ثقل مخروط نیز برخطی قرار دارد که راس را بمرکز ثقل قاعده وصل مینماید و فاصله آن از مرکز ثقل قاعده برابر $\frac{1}{4}$ قطعه واصل است .

تمرینات

۶۹ - با رشتهٔ فلزی بوزن p واحد طول مثلثی متساوی الاضلاع بضلع a و دائرهٔ بشعاع r ساخته ایم دائره را درون مثلث بقسمی قرار میدهیم که با دوضلع مثلث مماس گردد

اولا - مرکز ثقل دستگاه مرکب از دائره و مثلث را تعیین کنید

ثانیا - اگر شعاع دائره ترقی کند وضع مرکز ثقل چگونه تغییر مینماید

۷۰ - مرکز ثقل منکسر منتظمی را تعیین کنید ، و بوسیله آن مرکز ثقل قوس دائره ، قطاع محدود بمنکسر منتظم و قطاع مستدیر را بدست آورید

۷۱ - مرکز ثقل قوس پیچ را معین کنید ، در حالت مخصوصی که قوس مزبور برابر یك حلقه یا دو حلقه و . . . . است مرکز ثقل را معین سازید

۷۲ - شش ضلعی منتظمی مفروض است روس شش ضلعی بترتیب A_1 و A_2 و . . . و A_6 میباشند بهر یك از روس وزنی متناسب با اندیس آن وارد شده ثابت کنید مرکز ثقل این اوزان بر خط A_2A_5 بوده و از A_5 بفاصله $\frac{5}{7}$ ضلع شش ضلعی قرار دارد

۷۳ - بر محوری n نقطه A_1 و A_2 و . . . . و A_n بطولهای a و $2a$ و . . . . و na مفروض اند ، a عدد مثبت مفروض است ، مرکز ثقل دستگاه را تعیین کنید بفرض آنکه جرم نقاط مزبور اولا متناسب با اندیس‌های خود ثانیا متناسب بامجذور این اعداد باشد

۷۴ - مرکز ثقل دستگاهی را که مرکب از شش یال چهار وجهی است تعیین نمائید

۷۵ - مرکز ثقل کثیرالاضلاعی را تعیین کنید که سه ضلعش تشکیل نصف مسدس منتظم میدهند و یك ضلع دیگر آن قطر واصل بین دو انتهای همین نیمهٔ مسدس است

۷۶ - بر اضلاع مثلثی قائم‌الزاویه در خارج مربعاتی بضلع نظیر بنا کرده ایم ، اولا مرکز ثقل ۱۲ خط حاصل را تعیین نمائید ، ثانیا مرکز ثقل سطحی که از مثلث و سه مربع ایجاد میگردد معین نمائید (فواصل مرکز ثقل را از اضلاع زاویه قائمه حساب کنید)

۷۷ - مرکز ثقل جعبه مکعب شکل را که بدون در است تعیین نمائید بفرض آنکه قطر جدارش غیر قابل ملاحظه باشد

۷۸ - گونیائی متساوی‌الساقین وترش بطول ۰٫۲۰ متر است ، سوراخی مستدیر در آن بشعاع ۰٫۰۱ متر شده است که مرکزش از دوضلع زاویه‌قائمه بفاصله ۰٫۰۰۴ متر قرار دارد مقصود تعیین مرکز ثقل گونیا است بفرض آنکه متشابه الاجزا بوده و همه‌جا بیکقطر باشد

۷۹ - از مثلث متساوی الاضلاع بضلع a که متشابه الاجزاء است قرص مستدیری بشعاع r بر داشته اند که مرکزش O بر ارتفاع AH واقع بوده و از مرکز ثقل مثلث بفاصله

d قرار دارد ، مقصود تعیین مرکز ثقل باقیماندهٔ سطح است ، مقدار r را بقسمی تعیین کنید که مرکز مزبور بضلع BC نزدیکترین فاصله را دارا شود ، آیا ممکن است r را بقسمی اختیار کرد که مرکز ثقل مزبور قرینه O نسبت به G باشد

۸۰ - از شش ضلعی منتظم ABCDEF بمرکز O مثلث OAB را بر میداریم ، مرکز ثقل بقیهٔ سطح را تعیین نمائید ، بهمین ترتیب اگر مثلثات OAB و OBC را بر داریم مرکز ثقل سطح باقی را تعیین نمائید

۸۱ - در مربع ABCD نقطه مانند M را بقسمی تعیین کنید که اگر از سطح مربع مثلث AMB را برداریم مرکز ثقل بقیه سطح همین نقطه M گردد

۸۲ - مرکز ثقل ورقه مثلث شکلی را که از آن مثلث A′B′C′ را بر داشته ایم تعیین کنید بفرض آنکه اضلاع این مثلث بموازات مثلث اول و از آنها بیك فاصله باشند ، در چه حالتی مرکز ثقل مطلوب داخل مثلث A′B′C′ است

۸۳ - سطحی مستوی را موافق امتدادی بر صفحهٔ تصویر کرده ایم ثابت کنید تصویر مرکز ثقل سطح مفروض بر مرکز ثقل تصویر آن منطبق است

مورد استعمال - مرکز ثقل نیمه بیضی محدود بقطر اطول یا بقطر اقصر آن را تعیین کنید

۸۴ - فرض میکنیم G و G′ مراکز ثقل قواعد B و B′ از منشوری باشند ، صفحهٔ تمام یالهای جانبی منشور را قطع کرده γ نقطه تلاقی این صفحه و GG′ است

اولا ثابت کنید γ مرکز ثقل مقطع این صفحه است

ثانیا ثابت کنید حجم منشور ناقصی که محصوربین صفحه قاطع و قاعده B است متعادل با منشوری است بقاعدهٔ B بفرض آنکه یال جانبی آن مساوی و موازی $B\gamma$ باشد

ثالثا مرکز ثقل منشور ناقص را تعیین کنید

۸۵ - مرکز ثقل سطح چهار وجهی را تعیین نمائید

۸۶ - مثلث متساوی‌الساقین قائم الزاویه در زاویه A مفروض است خطی مانند MN بموازات AB بقسمی رسم کنید که مرکز ثقل ذوزنقه ABNM از ضلع AB بفاصله معین d قرار گیرد (بحث)

۸۷ - ثابت کنید که مرکز ثقل چهار ضلعی محدب بر مرکز قوای متساوی ومتوازی منطبق است که بروس و محل تلاقی اقطار چهار ضلعی وارد شده باشند ، قوای وارد بروس متحدالجهت بوده و قوه وارد بر O در جهت مخالف آنها است

۸۸ - مرکز ثقل قطعه از دائره محصور بین دو وتر متوازی یا یك وتر و قوس دائره را تعیین نمائید

۸۹ - مرکز ثقل هرم ناقص را با دو قاعده متوازی تعیین کنید

۹۰ - جسمی است مجوف بشکل کره بمرکز و شعاع معین ، قسمت خالی آن نیز

کره بمرکز و شعاع معین است خطالمرکزین دو کره نیز معلوم است مقصود تعیین مرکز ثقل این جسم میباشد ، چنانکه جسم را بر نقطه A از سطح خارجی آن بیاویزند بقسمیکه زاویه بین OA و 'OO معین باشد مقصود محاسبه زاویهٔ شعاع OA با قائم است

۹۱ ـ از جسم مکعب شکلی هرمی را که راسش مرکز و قاعده اش یکی از وجوه آن است بر داشته اند مرکز ثقل حجم حاصل تعیین کنید

۹۲ ـ مرکز ثقل قطاع کروی را که از دوران قطاع دائره OAB حول OA حاصل میگردد تعیین کنید

۹۳ ـ مرکز ثقل قطعه کروی را که محدود به دو صفحه متوازی است تعیین کنید ، مورد استعمال ـ مرکز ثقل نیمکره

۹۴ ـ اولهٔ قائم بطول یك متر و مقطع یك سانتیمتر مربع مفروض است وزن آن ۳۰۰ گرم است آنرا تا ارتفاع معینی از جیوه پر کرده اند مرکز ثقل دستگاه را تعیین کنید ، چقدر از جیوه را باید خالی کرد تا مرکز ثقل دستگاه بقدر کفایت پائین بیاید

۹۵ ـ جسمی بچهار ضلعی محدب ABCD که نسبت بقطر BD قرینه است محدود میباشد و این قطر قائم است از طرف دیگر محدود به قائم EF و صفحه که ازحرکت افقیه متکی بر دورهٔ ABCD و قائم EF ایجاد میگردد میباشد

اولا حجم جسم را تعیین کنید ، ثانیا مرکز ثقل حجم جسم را معین سازید

فصل ششم

استاتیك اجسام غیر آزاد ـ ماشینهای ساده

قوای مستقیم و عکس العملها ـ جسم صلب S خواه در حال تعادل وخواه در حال حرکت باشد ممکن است مصادف با اجسام دیگر گردد ، چنانچه A یکی از نقاط تماس جسم S با جسم دیگر 'S فرض شود میدانیم میتوان بدون آنکه در حالت جسم تغییری عارض گردد بجای عکس العمل جسم 'S نسبت بجسم S قوهٔ مانند R که بنقطه A وارد شده قرار دارد ، این قوه عبارت از یك **قوهٔ ارتباطی** است

این نکته را نیز نباید فراموش کرد که اگر 'A نقطهٔ از جسم 'S باشد که بانقطه A ازجسم S تماس دارد بنا برتساوی عمل وعکس العمل نقطه A نیز بر

'A عملی متقابل با R وارد میسازد قوای خارجی که جسم تحت تاثیر آنها است عبارتند از اولا : **قوای مستقیم** ثانیا **قوای ارتباطی** . و بنا بر شرائط تعادل یکدسته نقاط مادی :

وقتی جسم غیر آزاد درحال تعادل است حاملهائی که نمایش قوای مستقیم و قوای ارتباطی میباشند تشکیل دستگاهی معادل با صفر میدهند .

مثال ـ جسم سیالی (مایع یا گاز) بحال تعادل فرض میکنیم ، جرم معینی از این جسم را مانند M محدود بسطح S فرض میکنیم ، قوائی که جرم مزبور مستقیما تحت اثر آنها است عبارتند از اوزان نقاط همین جرم ، اوزان مزبور دارای منتجه مانند P یعنی وزن جرم M هستند که بنقطهٔ G مرکز ثقل جرم وارد شده

قوای ارتباطی عکس العملهای نقاط تماس سطح S هستند با نقاطی که جرم مزبور در آنها محصور است ولی چون بفرض تعادل بر قرار است عکس العملهای مزبور نیز دارای منتجه هستند که متقابل با وزن P است

حال اگر بجای جرم M در مایع جسم دیگری که کاملا فضای جرم M را فرا بگیرد قرار دهیم اینجسم از طرف مایع تحت اثر همان عکس العملها واقع خواهد شد بنا بر این :

جسم مزبور تحت اثر قوهٔ قائمی است که از تحت بفوق ممتد بوده ومقدارش برابروزن مایع همحجم جسم میباشد وامتدادش از مرکز ثقل جسم مزبور عبور میکند واین قانون ارشمیدس است

بعضی ارتباط های ساده ـ نقطهٔ ثابت ـ برای آنکه جسمی مانند S بتواند حول نقطه ثابتی متحرك باشد ، بر جسم ضمیمه کروی شکلی تعبیه مینماید و آنرا داخل فرو رفتگی بهمان شکل قرار میدهند بطریقی که کاملا در آن محصور گردد ، با چنین ارتباطی اگر اصطکاك را صفر فرض کنیم عکس العملهای جدار حفره بر ضمیمهٔ کروی شکل جسم بر امتداد قائم

هائی واقع است که از نقاط مختلفه سطح کره رسم گردد بنا بر این حاملهای نمایش قوای مزبور از مرکز کره عبور نموده در نتیجه منتجه آنها نیز از نقطه ثابت O مرور خواهد کرد، منتجه مزبور را که عکس العمل نقاط مختلفه حفره است **عکس العمل نقطهٔ ثابت** میخوانند، چنین وضع ارتباط بندرت درماشینها ملاحظه میگردد، بعدها خواهیم دید که برای تعادل اهرم لازم است که یك نقطه از دستگاه ثابت بماند.

محور ثابت دوران - وقتی دو نقطهٔ A و B از جسمی را ثابت فرض کنیم جسم فقط میتواند حول محور AB حرکت وضعی نماید، حال اگر جسم S حول محور AB متحرك باشد عکس العملهای A و B از محور بر جسم دو قوه هستند که بهمین نقاط از جسم وارد شده اند در جمیع حالاتیکه اصطکاك صفر است عکس العملها بر امتداد قائم های سطح دوار میباشند بنا بر این محور سطح دوار را، که همان محور AB است تلاقی خواهند کرد

محور دوران و لغزش - گویند جسمی دارای محور دوران و لغزش است اگر خطی مانند A از جسم همواره بر خط ثابت D نسبت بدستگاه مفروض منطبق باشد.

اگر استوانه مصمتی فرض کنیم که درون استوانه مجوفی بهمان شعاع دارای حرکت باشد عکس العملها در صورت صفر بودن اصطکاك قائم برسطح استوانی بوده یعنی محور را تلاقی خواهند کرد

لغزش - در موردی که اصطکاك صفر باشد عکس العملها قائم برسطح لغزنده میباشند بخصوص عکس العملها قائم بر امتداد انتقال مستقیم الخطی هستند که جسم موافق آن سیر مینماید (پیچ و مهره)

اتکاء - در حالتی که جسمی بتواند بر جسم دیگر بدون اصطکاك بلغزد عکس العملها قائم برسطوح تماس اند، مثلاً در موقعی که دندانه های دو چرخ از مقابل یکدیگر عبور مینمایند

ساده‌ترین حالت وقتی است که سطح اتکاء مستوی باشد، در اینصورت همواره با نبودن اصطکاك عکس العملها قائم بر این صفحه اند بعلاوه نسبت بصفحه باید در همان جهتی ممتد باشند که جسم قرار دارد

اصل موضوع استاتیك جسم صلب غیر آزاد - وقتی جسم A بحال تعادل است، قوای خارجی یعنی قوائی که مستقیماً بدان اثر مینمایند و عکس العملهای وارد بجسم تشکیل دستگاهی مساوی صفر میدهند. تعادل مزبور بوسیله شش معادله (E) بیان میگردد که مقادیر معلوم و مجهول را بیکدیگر ربط میدهند.

بسهولت میتوان فهمید که معادلات (E) بطور کلی برای تعیین عکس العملها کفایت نمینمایند، از امثله که قبلا مذکور افتاد معلوم میشود که عموما بینهایت عکس العمل موجود است، مثلا در موردی که کتابی بر میزی قرار میدهیم عکس العمل میز بر نقاط بینهایتی از کتاب وارد میگردد که آنها را نمیتوان بوسیله شش معادله مزبور تحصیل نمود بلکه باید در موارد معین فرضهای مخصوصی کرد، مثلا در اینصورت باید فرض کرد عکس العملهائی که بسطح تماس وارد میگردند دارای منتجه هستند که متناسب بامساحت همین سطح میباشند، ولی با تمام این مقدمات از معادلات (E) فقط در بعضی حالات مخصوص میتوان عکس العملهارا حساب کرد.

درهر صورت برای تعادل جسم A لازم است که معادلات (E) دارای جواب باشند، چنانچه معادلات مزبور جواب نداشته باشند جسم بحال تعادل نخواهد بود:

اما اگر معادلات مزبور دارای جواب باشد آیا جسم تحقیقاً بحال است یا نه، جواب این سوال از اصل ذیل معین میگردد.

هرگاه عکس العملهای ارتباطی ممکن الحصول باشند بقسمی که اگر جسم A را تحت اثر این عکس العملها وقوای مستقیم وارد بدان آزاد فرض کنیم بحال تعادل باقی بماند جسم مزبور تحقیقا در حالت تعادل است.

عکس‌العملهارا وقتی ممکن الحصول میگوئیم که از حیث کمیت امتداد مشخص باشند. بطور کلی اصل موضوع ذیل را در استاتیك یکدستگاه قبول مینمائیم:

یکدسته جسم مفروض است، این دستگاه تحت اثر قوای مستقیم وقتی بحال تعادل است که اگر برای هر یك از اجسام دستگاه قوائی مرکب از عکس‌العملهای ممکن‌الحصول ترتیب دهیم بقسمی که جسم مزبور تحت اثر این قوی وقوای مستقیم وارد بدان آزاد باشد جسم بحال تعادل باقی بماند.

جسمی که دارای نقطهٔ ثابت است ـ اهرم

قضیه ـ شرط لازم و کافی برای آنکه جسم صلبی که دارای نقطه ثابت است تحت اثر قوای مستقیم بحال تعادل باشد این است که منتجه قوای مزبور از نقطه O بگذرد.

اولا شرائط لازم است ـ زیرا اگر جسم تحت اثر قوای مستقیم بحال تعادل باشد این قوی با عکس‌العمل P نقطه ثابت تشکیل دستگاهی معادل صفر خواهند داد.

قوهٔ R که متقابل با P است باید معادل با مجموع قوای مستقیم باشد زیرا اگر بجای قوای خارجی مجموع آنها یعنی R را قرار دهیم در حالت خارجی جسم تغییری حاصل نمیگردد.

ثانیا شرائط کافی است ـ اگر قوای مستقیم وارده بجسم دارای منتجه مانند R باشند بقسمی که امتدادش به O بگذرد، قوهٔ P که متقابل با قوهٔ R است با قوای مستقیم تشکیل دستگاهی معادل با صفر میدهد این قوه عبارت از عکس‌العمل ممکن الحصول است.

بنا بر این جسم تحقیقا بحال تعادل خواهد بود میتوان گفت شرط آنکه قوای مستقیم دارای منتجه مار بر نقطه O باشند این است که عزم

مجموع قوی نسبت به نقطهٔ O صفر باشد این شرط کافی نیز هست زیرا در اینصورت قوای مزبور معادل با منتجه انتقالی خود نسبت بنقطه O میشوند

س ۷۰

اهرم ـ برای برداشتن تخته سنگی بوسیله میلهٔ AB انتهای میله راتحت تخته سنگ گذاشته و زیر میله جسمی که نسبتا مقاوم باشد مانند C قرار میدهند، چون بر نقطه A فشاری وارد آورند تخته سنگ بلند میشود؛ استعمال اهرم درعملیات عادی خیلی معمول است از نقطه نظر مکانیکی اهرم جسم صلبی است که دارای یك نقطه ثابت مانند O میباشد، جسم مزبور تحت اثر دو قوه مستقیم است، قدرت P که بر نقطهٔ A وارد میگردد و مقاومت Q که بنقطهٔ B اثر مینماید وزن اهرم را در مقابل قوای مزبور صفر فرض مینمائیم برای اینکه اهرم تحت اثر قوای وارده بحال تعادل بماند لازم و کافی است که عزم مجموع قوی نسبت به نقطه O صفر باشد عزم قوای P و Q حاملهائی است که بر صفحات مار بر O و خط اثر قوای مزبور عمود میباشد.

س ۷۱

بنا بر این صفحات مزبور باید منطبق باشند و در نتیجه لازم است که خطوط اثر قوی در صفحه مار بر O واقع شوند بعلاوه اگر OA', OB' فواصل نقطهٔ O از خطوط اثر قوی باشد از تساوی بین عزمها نتیجه میشود:

$$OA' \times P = OB' \times Q$$

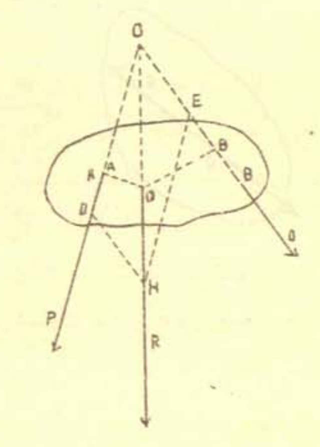
فواصل نقطهٔ O را از خط اثر قوی بازوهای اهرم مینامند

بالاخره برای آنکه حاملهای عزم متقابل باشند باید قوای P و Q بترتیب اهرم را در جهت مخالف دوران دهند پس برای تعادل اهرم لازم و کافی است که:

اولا خطوط اثر قدرت و مقاومت و همچنین نقطهٔ ثابت اتکاء در یك صفحه واقع باشند.

ثانیا قدرت و مقاومت بر نسبت معکوس بازوهای اهرم نظیر خود باشند.

ثالثا قدرت و مقاومت بقسمی ممتد باشند که اهرم را درجهات مختلف دوران دهند.



س ۷۲

فشار بر نقطه اتکاء - عمل اهرم بر نقطه اتکاء متقابل با عکس العمل این نقطه بر اهرم است و مقدار آن برابر منتجه قوای P و Q میباشد، برای بنای این قوه قدرت و مقاومت را امتداد میدهیم تا در نقطه C متلاقی شوند متوازی الاضلاع قوی یعنی CHHE را با اضلاعی معادل P و Q بنا مینمائیم قطر این متوازی الاضلاع یعنی CH متعادل با R که فشار وارد بر نقطه اتکاء است میباشد، چنانچه α مقدار زاویهٔ امتدادهای P و Q باشد از مثلث CDH چنین نتیجه میشود

$$R^2 = P^2 + Q^2 + ۲PQ\cos\alpha$$

چون ضلع CH محصور بین مجموع و تفاضل دو ضلع دیگر است پس R نیز محصور بین $P+Q$ و $Q-P$ میباشد.

استدلال فوق مبنی بر این است که قوای P و Q غیر متوازی باشند چنانچه قوای مزبور موازی و متحد الجهت باشند مقدار فشار وارد بر نقطهٔ اتکاء مساوی $P+Q$ خواهد بود و اگر قوی متوازی ولی مختلف الجهت باشند

مقدار مساوی $P-Q$ میباشد ولی در جمیع حالات این نامساوی مضاعف برقرار است:

$$P-Q \leq R \leq P+Q$$

۷۵ - انواع اهرم - غالبا اهرم دارای شکل مستقیم الخط است بقسمی که نقطهٔ اتکاء بر امتداد خط واصل بین نقاط اثر قدرت و مقاومت قرار دارد، با این فرض بنا بر وضع اتکاء نسبت بنقاط اثر قدرت و مقاومت سه نوع اهرم تشخیص میدهیم: اهرم نوع اول بقسمی است که نقطهٔ اتکاء بین نقاط اثر قدرت و مقاومت باشد، مانند قیچی و ترازو

در اهرم نوع دوم نقطهٔ اثر مقاومت مابین نقطه اتکاء و نقطهٔ اثر قدرت قرار دارد مانند دیکچرخه، تلمبه ها غالبا اهرمهای نوع دوم اند.

اهرم وقتی نوع سوم است که قدرت مابین مقاومت و نقطه اتکاء باشد، اگر خطوط اثر قدرت و مقاومت متوازی باشند قدرت ازمقاومت زیادتر است، مانند انبر.

س ۷۳

جسم صلبی که دارای محور دوران باشد

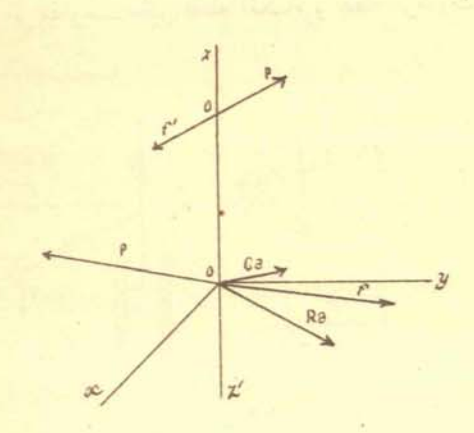
۷۶ - قضیه - شرط لازم و کافی برای آنکه جسم صلب متحرك حول محور ثابتی بدون اصطکاك بحال تعادل باشد این است که مجموع جبری عزمهای قوای مزبور نسبت بمحور ثابت صفر باشد

اولا شرائط لازم است - جسم را بحال تعادل فرض میکنیم OO' را محور ثابت اختیار مینمائیم عکس العملهای محور و قوای مستقیم وارده تشکیل دستگاهی معادل با صفر میدهند

فرض میکنیم ΣN_a مجموع جبری عزمهای قوای مستقیم نسبت

بمحور و ΣN_r مجموع عزمهای عکس‌العملها نسبت باینخط باشند ، مجموع $\Sigma N_a + \Sigma N_r$ برابر صفر است ولی چون عزمهای عکس العملها نسبت بمحور صفر میباشد پس لازم میاید $\Sigma N_r = 0$.

ثانیا شرائط کافی است ـ فرض میکنیم مجموع‌عزمهای قوای‌مستقیم وارد بر جسم صلبی نسبت بمحور ثابت OO' برابر صفر باشد ، اگر OG_a و OR_a عزم مجموع و منتجه انتقالی قوی نسبت به نقطه O از محور باشند بنا بفرض نتیجه میشود که حامل OG_a باید بمحور عمود باشد ، صفحهٔ P که بر O مرور کرده و بر OG_a عمود است شامل محور خواهد شد ، بر نقطهٔ O' مفروض برمحور قوهٔ f را در صفحه P مرور میدهیم بقسمی که خط اثرآن عمود برمحور باشد کمیت و جهت این



س ۷۴

حامل بقسمی است که عزمش نسبت به نقطه O برابر OG_a شود ، اگر f قوهٔ باشد که بر نقطه O وارد شده و مقدارش مساوی فضل هندسی OR_a بر f' اختیار کردد دستگاه قوای f و f' معادل با قوای مستقیم وارد بجسم خواهد بود .

میتوان بوسیله دو قوه φ و φ' که بترتیب با قوای f و f' متقابل اند تعادل‌را.برقرار ساخت‌قوای φ و φ' عکس‌العملهای ارتباطی ممکن‌الحصول‌اند پس بنا بر اصل استاتیك اجسام صلب غیر آزاد جسم بحال تعادل است .

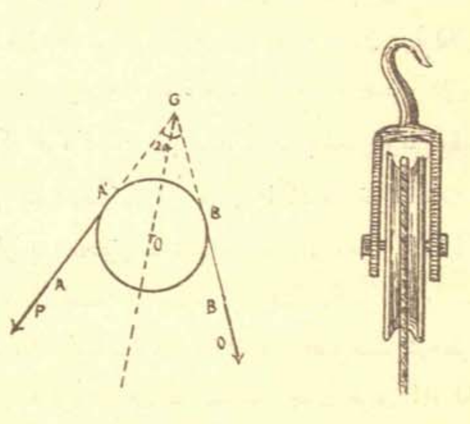
در حالت مخصوصی که جسم فقط تحت اثر یك قوه باشد برای اینکه

عزم این قوه نسبت به محور صفر شود باید در صفحه مار بر محور قرار داشته باشد بعبارة اخری خط اثر قوه باید محور را تلاقی نماید .

قرقره و چرخ چاه

۷۷ ـ قرقره ثابت ـ قرقره استوانه دواری است که ارتفاع آن درمقابل شعاع قاعده اش نسبتا کوچك است . سطح جانبی این استوانه دارای فرو رفتگی است که در آن میتوان رشته را عبور داد بر یکی از دو سر این ریسمان مثلا بر نقطه A قدرت و بر سر دیگر آن یعنی نقطه B مقاومت وارد میگردد . قرقره میتواندتنهاحول محوری‌متحرك باشد برای این‌منظور درقرقره مدخلی متحدالمرکز با قاعده استوانه ایجاد نموده درآن میله استوانه شکلی که شعاعش برابر شعاع مدخل است قرار میدهند ، دو منتهای این میله بر قطعه موسوم بدو شاخه نصب است دو شاخه مزبور دارای قلابی است که‌میتوان آنرا به نقطه آویخت .

از جرم ریسمان‌صرف نظر مینمائیم بعلاوه رشته‌را قابل انعطاف فرض



س ۷۵

میکنیم بقسمی که کاملا بر سطح داخل حفره بچسبد مرکز ثقل قرقره را بر مرکز ثقل شکل منطبق اختیار مینمائیم ، بنا بر آنچه که راجع بتعادل رشتهٔ بدون جرم ذکر نموده ایم قطعات 'AA و 'BB مستقیم‌الخط میباشند و در اینجاقطعات مزبور مماسهائی‌هستندکه‌از نقاط 'A و 'B بر دایره O رسم میگردد دستگاه حاصل از رشته AB وقرقره از طرفی تحت اثر قوای‌مستقیمی است که بر نقاط A و B وارد کشته و از طرف دیگر تحت اثر عکس العمهائی است که بر مدخل O وارد میشوند عکس‌العملهای اخیر بر سطح میله استوانهٔ شکل عمود میباشند زیرا فرض میکنیم قرقره بدون اصطکاك دوران کرده باشد بنا بر این عکس‌العملها محور را تلاقی خواهند نمود

دستگاه حاصل از عکس‌العملها وقوای P و Q معادل با صفر است مجموع جبری عزمهای قوی نسبت به محور صفر است پس چنین نتیجه میشود :

$$Pr = Qr$$

بنا بر آنکه r شعاع دایره O فرض شود پس حاصل میگردد

$$P = Q \qquad (۱)$$

شرطی که از تساوی (۱) معین میشود لازم است برای آنکه کافی بودن آن معین کردد ملاحظه میکنیم که بفرض معلوم بودن قوهٔ Q برای آنکه تعادل برقرار باشد باید به A قوهٔ مانند P وارد ساخت و از تساوی (۱) معلوم میشود که قوهٔ اخیر باید مساوی Q باشد . وقتی مقدار قدرت از مقاومت متجاوز شود دستگاه در جهت P کشیده خواهد شد .

۷۸ ــ فشار بر محور ــ عکس العملهای محور باید با منتجه قوای P و Q بحال تعادل باشند این منتجه برابر فشار R بر محور است

چون‌فرض‌کنیم 2α زاویه‌بین 'AA و 'BB و C فصل‌مشترك خطوط 'AA و 'BB باشد و از وزن قرقره صرف نظر نمائیم ، چون قوای P و Q متساوی اند منتجه آنها برمنصف‌الزاویه ACB واقع خواهد شد بقسمیکه چنین نتیجه‌میشود

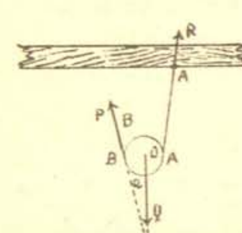
$$R = 2P\cos\alpha$$

چون α از 0 تا $\frac{\pi}{2}$ تغییر کند فشارمزبور از $2P$ تا صفر تنزل خواهد کرد ، مقدار فشار بازاء $\alpha=0$ بعبارة اخری وقتی دو قطعه رشته با یکدیگر موازی‌باشند مقدار فشارماکزیموم ومساوی‌دوبرابرقدرت است وهرگاه $\alpha=\frac{\pi}{2}$ یعنی رشته بر قرقره مماس باشد مقدار فشار برابر صفر است

۷۹ ــ قرقره متحرك ــ برحفره قرقره رشته‌ئی که یکسر آن بنقطه‌ثابت A وصل شده داخل مینمائیم بر انتهای دیگر رشته یعنی نقطه B قدرت P را وارد میکنیم چنین فرض مینمائیم که مقاومت بقلاب قرقره آویخته شده باشد ، دستگاه 'ABA'B تحت اثر سه قوه خارجی است : قوای Q و P و عکس‌العمل R نقطهٔ A ، از تعادل رشته 'AA معلوم‌میشود که عکس‌العمل باید بر امتداد 'AA باشد ، سه قوه P و Q و R باید تشکیل دستگاهی معادل صفر بدهند پس لازم است که در یك صفحه واقع باشند ، مقاومت Q بوسیلهٔ میله استوانهٔ شکل بر قرقره وارد میگردد ، اگر فرض کنیم اصطکاك میله نسبت بقرقره صفر باشد خط اثر Q محور را تلاقی مینماید ، قوهٔ Q در اینجا بمنزله عکس‌العمل محور در قرقره ثابت ، است و قوه R بمنزله مقاومت محسوب میگردد ، موافق همان استدلال که در قرقره‌ثابت ذکر نمودیم معلوم میشود که شرط‌تعادل قرقره‌متحرك این است :

$$P = R \qquad (۱)$$

و مقدار فشار در اینصورت نیز برابر $R = 2P\cos\alpha$ (۲) میباشد بنا بر آنکه 2α زاویهٔ بین دو سر رشته باشد .

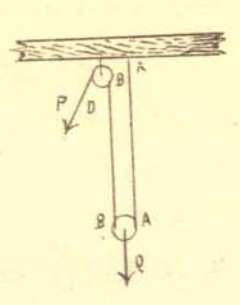


س ۷٦

از تساوی (۱) معلوم میشود که کشش ریسمان در جمیع نقاط رشته یك مقدار است از تساوی (۲) نتیجه میشود که اگر دو سر رشته با یکدیگر متوازی باشند با قوه معین Q تعادل با بزرگترین مقادیر ممکنه

مقاومت بر قرار میشود و مقدار آن برابر مضاعف قدرت است حال باید کافی بودن شرایط فوق را برای تعادل بر قرار نمائیم اگر بازاء مقداری از قدرت تعادل با مقاومت Q بر قرار شود و ۲α زاویه بین دو سر رشته اختیار کرده بنا بر تساوی (۲) اینمقدار باید مساوی $\frac{Q}{۲cos\alpha}$ باشد بقسمی که اگر بر B در امتداد رشته قوهٔ برابر همین مقدار وارد سازیم قرقره بحال تعادل خواهد بود وقتی قدرت از مقدار مزبور زیادتر شود قرقره بالا میرود

۸۰ ـ ترکیب یك قرقره ثابت و یك قرقره متحرك ـ برای آنکه بتوان قدرت را بسهولت وارد نمود گاهی رشتهٔ قرقره متحرك را از قرقره ثابتی عبور میدهند: و بار را بقلاب قرقره متحرك میاویزند و بر انتهای آزاد رشته یعنی نقطه D قوهٔ P که همان قدرت است وارد میسازند از شرایط تعادل قرقره ثابت نتیجه میشود که باید کشش قطعهٔ 'BB از رشته در همه نقاط آن برابر قدرت باشد و از شرایط تعادل قرقره متحرك نیز معلوم میشود که این کشش باید برابر کشش قطعهٔ 'AA باشد و مقدار این کشش نیز برابر عکس‌العمل نقطه A میباشد، قوه P بوسیلهٔ رابطه $Q=۲Pcos\alpha$ با مقاومت بستگی دارد بنا بر آنکه ۲α زاویه بین دو سر رشته باشد که از قرقره متحرك عبور نموده و چنانکه ملاحظه میشود چون این دو رشته متوازی‌اند پس $Q=۲P$



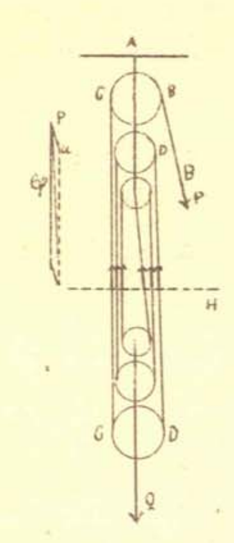
س ۷۷

۸۱ ـ قرقره مرکب ـ قرقره مرکب اجتماع چند قرقره است که دارای دو شاخه و قلاب میباشند و همه حول یك محور یا محورهای متوازی متحرك اند، چون یك قرقره مرکب ثابت و یك قرقره مرکب متحرك را با یکدیگر جمع نمایند قرقره مختلط تشکیل میشود.

برای توضیح فرض میکنیم قرقره مختلط مرکب از دو قرقره مرکب

متحرك و ثابت باشد وضمنا محورهای قرقره ها با یکدیگر متوازی وشعاع آنها مختلف باشد تا آنکه رشته بتواند از تمام قرقره های دستگاه عبور نماید

قدرت بر منتها الیه B رشته وارد میگردد که بدوا از قرقره ثابت و پس از آن از یك قرقره متحرك و قس علیهذا عبور نموده و بعد از آنکه از جمیع قرقره ها عبور نمود انتهای دیگرش بدو شاخه آخرین قرقره ثابت دستگاه وصل میگردد، هر یك از قرقره های مرکب را شامل سه قرقره فرض مینمائیم اگر Q مقاومت یعنی باری باشد که بر دو شاخه اولین قرقره متحرك آویخته شده از شرایط تعادل اولین قرقره ثابت معلوم میشود که کشش 'CC برابر قدرت P است و همچنین از قرقره متحرك معین میگردد که کشش 'DD مساوی کشش رشته 'CC است و چون بهمین ترتیب پیش رویم چنین نتیجه میشود که کشش در تمام امتداد رشته یك مقدار است حال دو قرقره را از یکدیگر دور فرض مینمائیم برای آنکه رشته‌ها تقریبا باهم متوازی شوند و چنین فرض مینمائیم که رشته ها را بواسطه صفحه افقی H قطع کرده باشیم برای آنکه قرقره مرکب بحال تعادل باشد



س ۷۸

باید بجای رشته ها قوائی که در امتداد همانها و فوق صفحه افقی H که در جهت تحت بفوق ممتد اند قرار داد بقسمی که مقدار مشترك آنها مساوی P باشد، چون دستگاه مرکب از قرقره مرکب و رشته هائی که فوق صفحه H قرار دارند بحال تعادل است پس باید قوی تشکیل دستگاهی معادل صفر بدهند یعنی لازم است $Q=٦P$

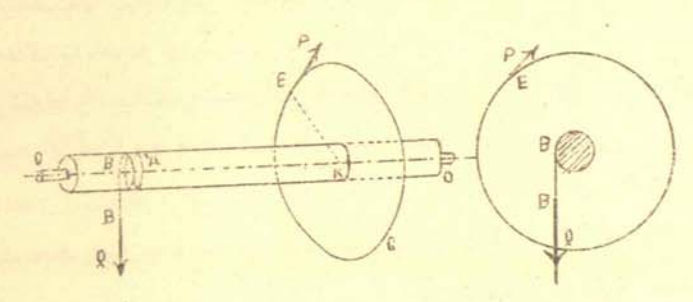
واضح است در صورتیکه مقاومت Q معین باشد میتوان مقدار قوه P

را برای تعادل دستگاه بدست آورده و باین ترتیب معلوم میشود $P = \frac{Q}{6}$
شرائط مزبور برای تعادل کافی نیز میباشد.

واضح است میتوان رابطه $\frac{Q}{6}$ را به رابطهٔ $\frac{Q}{2n}$ تبدیل نمود بنا برآنکه عده قرقره‌های هر دسته n باشد.

۸۲ - چرخ چاه معمولی - قسمت اصلی چرخ چاه معمولی عبارت است از استوانهٔ دواری موسوم به تنه چرخ که بوسیله میله استوانه شکلی از آهن بر دو پایه بحالت افقی نصب است و محور میله ها با محور تنه مشترك است، مقاومت بواسطه طنابی که بر تنه چرخ می پیچد وارد میگردد یك سر دیگر این طناب بر نقطه از سطح تنه ثابت شده، قدرت مماس بر دائره C میباشد که درمحور با تنه مشترك است. ممکن است قدرت بوسیله میله آهنی که برسطح استوانه نصب میباشد وارد شود درحالت اخیر دایره C مسیر منتهای میله است درشکل تصویر چرخ چاه را بر صفحه عمود برمحور رسم کرده‌ایم

دستگاه مرکب از چرخ چاه و طناب AB′B تحت اثر قوای P و Q و عکس العملهای پایه ها میباشد اگر اصطکاك صفر باشد عکس العملها محور



ش ۷۹

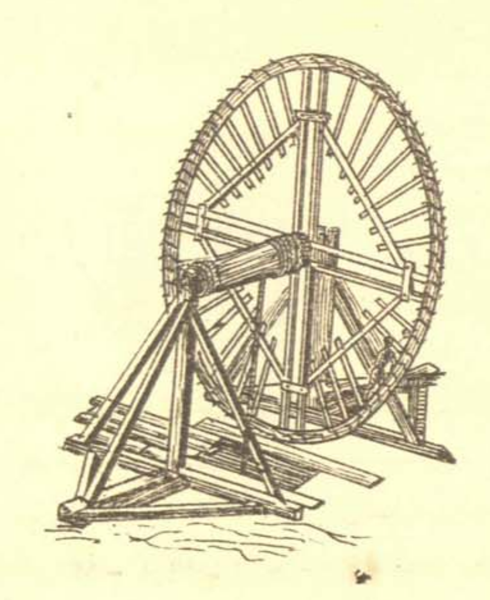
OO′ را تلاقی مینمایند پس عزمشان نسبت باین خط صفر خواهد بود ولی چون باید مجموع عزمهای قوای خارجی نسبت بمحور صفر باشد پس لازم میاید مجموع جبری عزمهای قوای P و Q نسبت بمحور صفر شود.

اگر r و R اشعه تنه و چرخ C باشند شرط تعادل چنین میشود:

$$PR = Qr \qquad (1)$$

بعلاوه باید P و Q بقسمی ممتد باشند که عزمشان نسبت بمحور در جهات مختلفه باشد چنانکه ملاحظه میشود بفرض آنکه مقدار مقاومت Q معین باشد شرط تعادل دستگاه این است که مقدار قدرت برابر $Q \cdot \frac{r}{R}$ شود، شرائط مزبور کافی نیز میباشند حال اگر مثلا نسبت شعاع تنه و چرخ $\frac{1}{10}$ باشد معلوم میشود که قدرت $\frac{1}{10}$ مقاومت است.

۸۳ - چرخ چاه معدنی - برای استخراج سنگ از معدن اسبابی موسوم بچرخ چاه معدنی استعمال میشود واختلاف آن با چرخ چاه معمولی در این است که در اینجا قدرت مماس بر چرخ نیست، بلکه قدرت وزن عمله ایست که بر چرخ بواسطه پلکانی که در آن تعبیه شده تغییر مکان میدهد، اگر P وزن عمله یعنی مقدارقدرت باشدکه درنقطه B تصویر شده و Q مقاومت یعنی وزن سنگی باشد که مقصود استخراج آن است وبمنتها الیه طنابی بسته شده چون O را تصویر محور چرخ و α را زاویهٔ حاده بین OB و قطر افقی OA اختیار نمائیم، مانند تعادل چرخ چاه‌معمولی



ش ۸۰

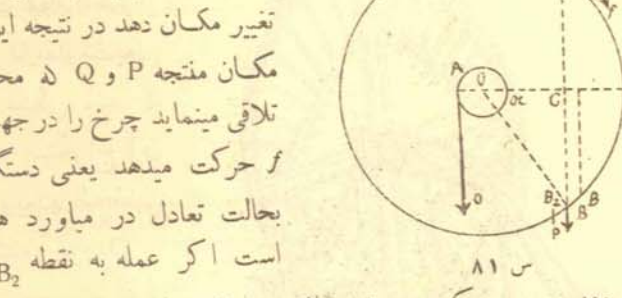
شرط تعادل این است که عزم قوای P و Q نسبت بمحور صفر شود یعنی :

$$Qr = PR\cos\alpha \qquad (۱)$$

بفرض آنکه r شعاع تنه و R شعاع چرخ باشد وضمنا چون درمثلث OBC ملاحظه کنیم $OC = R\cos\alpha$ ، از تساوی (۱) چنین نتیجه میشود :

$$\cos\alpha = \frac{Qr}{PR} \qquad (۲)$$

اگر طرف ثانی این تساوی کمتر از واحد باشد یعنی زمانی که Q کمتر از $P\frac{R}{r}$ اختیار شود میتوان زاویه مانند α مابین 0 و $\frac{\pi}{۲}$ تعیین کرد بقسمی که تساوی (۲) محقق گردد ، نظیر این زاویه برای عمله دو وضع تعادل B و B' را ایجاد میکند که نسبت بصفحه افقی H متقارن اند و حال ثابت مینمائیم که تعادل درنقطه B که تحت صفحه H است پایدار بوده اما درنقطه B' فوق صفحه H ناپایدار میباشد .



س ۸۱

فرض میکنیم که عمله از نقطه B به نقطه B_1 نزدیك به B وفوق آن تغییر مکان دهد در نتیجه این تغییر مکان منتجه P و Q که محور را تلاقی مینماید چرخ را در جهت سهم f حرکت میدهد یعنی دستگاه را بحالت تعادل در میاورد همچنین است اگر عمله به نقطه B_2 تغییر مکان دهد جهت حرکت چرخ موافق سهم f' خواهد بود یعنی باز اسباب بطرف وضع تعادل B سیر مینماید ، بهمین ترتیب معلوم میشود که وضع تعادل نقطه B' ناپایدار است و در این نقطه تغییر مکان عمله خالی از خطر نیست .

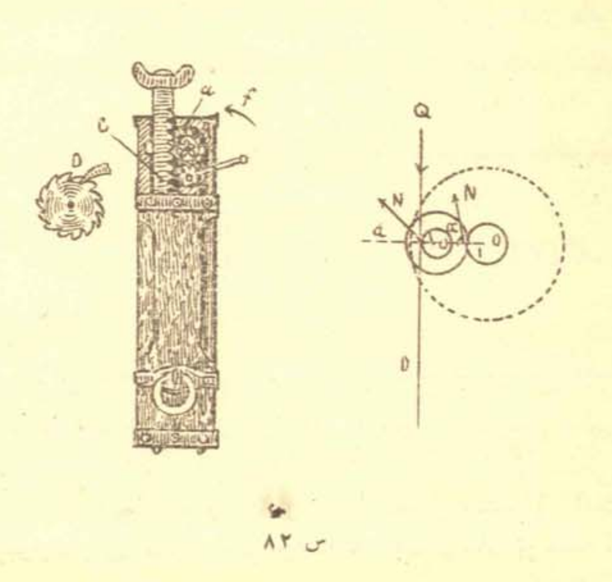
۸۴ - کریك Cric - اسبابی است که برای بالا بردن بارهای سنگین بارتفاعات قلیل استعمال میشود ارتفاع مزبور از ۶۰ سانتیمتر تجاوز نمینماید

قسمت اصلی اسباب عبارت از تیغه مضرس C و چرخ دندانه دار a است ، چرخ اخیر مربوط بچرخ مضرس A است که درمحور با آن مشترك بوده و بواسطه چرخ b بحرکت در میاید ، تیغه مضرس داخل محفظه آهنی متحرك میباشد .

داخل محفظه مزبور ضمیمه فلزی D و مربوط بچرخ b قرار دارد که همواره مابین دو دندانه چرخی بمحور b واقع میباشد هنگامیکه قدرت چرخ a را درجهت سهم f بحرکت در میاورد ضامن D بواسطه وزن خود بین دو دندانه چرخ مزبور قرار گرفته و مانع از این میشود که حرکت در جهت مخالف سهم انجام گیرد .

بار برداشتنی را برقسمت فوقانی تیغه C قرار میدهند .

فرض میکنیم r' شعاع دایره اولیه چرخ b و R شعاع دایره اولیه چرخ A و r شعاع دایره اولیه a باشد دایره اخیر دارای گردش بدون لغزش برخطی مانند D که متعلق به تیغه است میباشد .



س ۸۲

میله ازطرفی تحت اثر قوه Q که در امتداد D وارد شده میباشد وازطرف دیگر تحت اثر عکس‌العمل N که بوسیله چرخ a وارد میگردد قرار دارد این عکس‌العمل قائم بر دندانه ها درنقطه تماس میباشد ، همچنین تیغه مزبور تحت اثر عکس‌العملهای لغزشی نیز واقع میگردد . عکس العملهای اخیر قائم بر D میباشند اگر لغزش را بدون اصطکاك فرض کنیم تصاویر قوی بر D حاملهائی هستند که مقادیر جبری آنها دارای مجموعی برابر صفر است یعنی میتوان نوشت :

$$Q = N\sin a \qquad (۱)$$

بفرض آنکه a زاویه بین امتداد N با شعاع OI از چرخ a باشد .

دستگاه مرکب از چرخهای a و A تحت اثر قوه متقابل با N و عکس العملهای محور مشترکشان و عکس‌العمل N' از چرخ b نسبت بچرخ A بحال تعادل میباشد اگر a' زاویهٔ بین این عکس‌العمل و خط المرکزین $O'O$ باشد ، بنا بر تعریف عزم ثابت نسبت بمحور چرخ a میتوان چنین نوشت :

$$Nr\sin a = N'R\sin a' \qquad (۲)$$

چرخ b تحت اثر قوهٔ متقابل با N' و قدرت P وعکس‌العملهای محورش میباشد ، بنا بر تعریف عزم نسبت بمحور چرخ b اینرابطه حاصل است :

$$N'r'\sin a' = PR' \qquad (۳)$$

R' طول میله است ، چون سه تساوی‌را دریکدیگر ضرب‌نمائیم حاصل‌میگردد

$$Q = P\frac{RR'}{rr'}$$

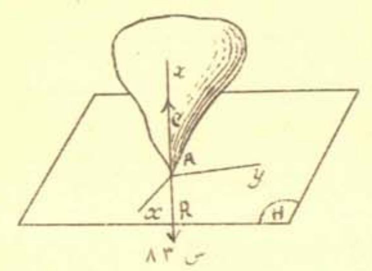
مثلا اگر $R = ۵r$ و $R' = ۵r'$ با قدرتی که کمی زیاد تر از ۳۰ کیلوگرم باشد میتوان جسمی بوزن ۷۵۰ کیلوگرم را بالا برد .

جسمی که بر صفحهٔ ثابتی بواسطه یك نقطه متکی میباشد

۸۵ - قضیه - شرط لازم و کافی برای آنکه جسم صلبی که بواسطه یك نقطه خود بدون اصطکاك بر صفحه ثابتی متکی است تحت اثر قوای مستقیم وارد بدان بحال تعادل باشد این است که قوای‌مزبور دارای منتجه قائم بر صفحه ثابت و مار برنقطه اتکاء

باشند بعلاوه باید منتجه مزبور بقسمی ممتد باشد که جسم بر صفحه بچسباند .

اولا شرط لازم است - فرض میکنیم جسم بحال تعادل و A نقطه باشد که جسم را بدون اصطکاك بوسیله آن بر صفحه H قرار داده ایم ، قوای خارجی که جسم تحت اثر آنها است عبارتند از قوای مستقیم وعکس العمل φ صفحه ،قوه اخیر برنقطه A مرور کرده وبرصفحه قائم است ، واضح است اگر بجای قوای مستقیم وارده قوهٔ R را که مقابل با φ است قرار دهیم تعادل جسم برقرار میماند



س ۸۳

بنا براین لازم میاید منتجهٔ قوای مستقیم متعادل با R باشد و بعبارهٔ اخری منتجه قوای مزبور برنقطه A بگذرد و بر صفحه H قائم باشد ، بعلاوه‌وقتی جسم را بر صفحه قرار میدهیم باید منتجه قوای مستقیم یا صفر بوده یا بطریقی ممتد باشد که جسم‌را بر صفحه H بچسباند زیرا اگر درجهت‌مخالف جهت مزبور شود جسم از صفحه جدا خواهد گردید .

ثانیا شرط کافی است - فرض میکنیم قوای مستقیم دارای منتجه باشند که در حکم قضیه ذکر شده ، قوهٔ که با این **منتجه** متقابل باشد عبارت از عکس العمل ممکن الحصول است پس جسم بنا بر اصل استاتیك جسم صلب غیر آزاد بحال تعادل خواهد بود .

،قدارفشار برنقطه اتکاء برابر منتجه R است که برنقطه A ازصفحه واردشده

۸۶ - پایداری - شرط آنکه تعادل پایدار باشد این است که اگر جسم را کمی از وضع تعادلش منحرف نمائیم مجددا بهمان حال برگردد

درحالیکه جسم تنها تحت اثر قوه وزن خود باشد خط اثر منتجه قوای مستقیم قائمی است که بر مرکز ثقل آن مرور مینماید ، صفحه اتکاء در اینصورت باید افقی بوده و مرکز ثقل جسم بر قائم مار بر نقطه اتکاء

واقع شود .

اگر مرکز ثقل G فوق صفحه H باشد چون جسم را از وضع تعادلش منحرف سازیم واضح است تحت اثر وزنش از اینحالت خارج خواهد شد بنابر این تعادل ناپایدار است مانند آنکه اگر راس جسمی مخروطی شکل را بر صفحه افقی H قرار دهیم

اگر G تحت صفحه اتکاء واقع باشد وقتی جسم را از وضع تعادل خود منحرف نمائیم مجددا تحت اثر وزنش بهمان حال رجعت مینماید تعادل بی تفاوت است وقتی که اگر جسم را تغییر وضع دهیم مقاومت نماید واین درحالتی است که نقطه A بر G منطبق باشد

در حالات فوق همواره چنین فرض میکنیم که تنها جسم در یك نقطه با صفحهٔ H اتکاء داشته باشد

وقتی جسم مختوم به سطحی مماس با صفحه باشد غالبا تعادل پایدار است بدون آنکه لازم باشد نقطهٔ G تحت صفحه H قرار گیرد، مثلا اگر جسمی متشابه الاجزاء بشکل قطعه کروی باشد مرکز تقارن آن بر محور تقارن قطعه واقع میباشد بقسمی که چون جسم را از وضع تعادل بوضع دیگر انتقال دهیم مجددا بهمان حالت برمیگردد

جسمی که بواسطهٔ خطی بر صفحه ثابتی متکی است

۸۷ - قضیه - شرط لازم وکافی برای تعادل جسمی تحت اثر قوای مستقیم که بدون اصطکاك بواسطه مستقیم ثابتی برصفحه متکی میباشد این است که منتجه قوی قائم برصفحه بوده و خط اثرش صفحه را بین دو انتهای اتکاء تلاقی نمایند .

اولا شرط لازم است - جسم را بحال تعادل فرض مینمائیم عکس العملها قوای قائم بر صفحه بوده و بنقاطی از جسم که در صفحه اتکاء قرار دارند وارد میشوند و بعلاوه در همانطرفی از صفحه که نقاط مزبور قرار دارند واقع میباشند، این قوی دارای منتجه قائم بر صفحه و ممتد در

همان جهتی که جسم است خواهند بود بعلاوه این منتجه دارای خط اثری است که خط اتکاء جسم را مابین دو سر آن تلاقی مینماید .

قوای مستقیم باین ترتیب باید با منتجه مزبور تشکیل دستگاهی معادل با صفر بدهند پس لازم است که دارای منتجه عمود برصفحه باشند بقسمی که جسم تحت اثر آن بر صفحه اتکاء بچسبد و ضمنا خط اثرش مستقیم اتکاء را بین دو سر آن تلاقی نماید .

ثانیا شرط لازم است - اگر قوای مستقیم دارای منتجه باشند که حائز شرایط حکم است ، اگر جسم دارای دو نقطه اتکاء باشد تنها یك طریقه ، و اگر دارای نقاط اتکاء زیاد باشد بطرق عدیده میتوان این منتجه را بقوای متوازی و متحدالجهت که بنقاط مختلفه اتکاء وارد میگردند تجزیه نمود ، قوای متقابل آنها عکس العملهای ممکن الحصول اند بنا بر این جسم بحال تعادل خواهد بود .

مثلا اگر مخروط یا استوانه متشابه الاجزاء را بوسیله یکی از مولدهایش بر صفحه افقی قرار دهیم بحال تعادل باقی خواهد ماند در اینحال نقاط اتکای بیشماری که همان مولد استوانه یا مخروط است موجود میباشد .

جسمی که بر صفحهٔ ثابتی بواسطه نقاط غیر واقع بریك استقامت متکی است .

۸۸ - کثیرالاضلاع اتکاء - وقتی جسمی بر صفحه بوسیله نقاط غیر واقع بر یك استقامت متکی است کثیر الاضلاعی که جمیع نقاط اتکاء برمحیط آن یا درون آن واقع اند **کثیرالاضلاع اتکاء** میگویند .

۸۹ - شرایط تعادل - قضیه - شرط لازم و کافی برای تعادل جسم صلبی تحت اثر قوای مستقیم که برصفحهٔ ثابتی متکی میباشد این است که قوای مزبور دارای منتجه قائم برصفحه باشند بقسمی که این منتجه جسم را بر صفحه بچسباند و بعلاوه خط اثرش صفحه را داخل کثیرالاضلاع اتکاء تلاقی نماید .

اولا شرط لازم است - جسم را بحال تعادل فرض میکنیم، عکس العملهای نقاط صفحه، قائم بر آن اند بعلاوه نقطه اثر آنها همان نقاط اتکاء بوده و ممتد در همان جهتی از صفحه هستند که نقاط اتکاء قرار دارند، پس مرکز این قوی نیز با آنها متحد الجهت بوده و نقطه اثرش داخل کثیر الاضلاع اتکاء است، بنا بر این قوای مستقیم که باید با عکس العملها تشکیل دستگاه معادل صفر بدهند دارای منتجه هستند که حائز شرط حکم قضیه باشد

ثانیا شرط کافی است - اگر قوای مستقیم دارای منتجه که درشرط حکم مسئله صدق کند باشند ممکن است اگر جسم دارای سه نقطه اتکاء باشد یك طریقه و اگر دارای نقاط اتکاء بیشمار باشد بطرق عدیده منتجه مزبور را بقوای بیشماری تجزیه نمود بقسمی که خط اثر آنها بر نقاط اتکاء جسم مرور نمایند قوای متقابل با این قوی عکس العملهای ممکن الحصول میباشند بنا بر این جسم تحت اثر قوی بحال تعادل است.

۹۰ - تعادل جسم وزینی که میتواند بر صفحه ثابتی بدون اصطکاك بلغزد - فرض میکنیم جسم بر صفحه مایل P دارای اتکای غیر مستقیم الخط بوده بعلاوه تحت اثر وزن خود وقوهٔ مستقیم دیگری مانند F باشد

برای آنکه جسم تحت اثر قوای F و p بحال تعادل باشد باید قوای مزبور دارای منتجه باشند و بعبارة اخری دریك صفحه واقع شوند، صفحه مزبور Q شامل قائم نقطه G یعنی مرکز ثقل جسم میگردد، منتجه قوای F و p باید عمود برصفحه P شوند پس صفحه Q نیز عمود بر صفحه P است بنا بر این صفحه Q بر فصل مشترك صفحات مایل و افق عمود شده در نتیجه صفحه P را در بزرگترین شیب آن تلاقی خواهد نمود صفحه شکل را بر صفحه Q اختیار مینمائیم فرض میکنیم Ox خط بزرگترین شیب صفحه P باشد و i میل این صفحه اختیار گردد، AB را قطعه از Ox که داخل کثیر الاضلاع اتکاء است فرض مینمائیم. اگر C محل تلاقی خط اثر قوه F و قائم نقطه G باشد برای تحقیق تعادل جسم میتوانیم p و F را

بمبداء C اختیار نمائیم بنا براین CE و CK را همسنگ p و F رسم میکنیم.

برای آنکه تعادل جسم بر قرار گردد لازم و کافی است که منتهای منتجه قوی یعنی D بر خط Cu قائم بر صفحه P واقع باشد بعلاوه اینخط درجهت صفحه ممتد بوده و صفحه را مابین B و A تلاقی نماید، فرض میکنیم شرط اخیر مقرر گردد تحقیق میکنیم که K باید چگونه باشد تا شرایط دیگر بر قرار شود.

نظیر هر یك از نقاط Cu نقطه مانند K حاصل میگردد بقسمی که DK همسنگ EC میباشد، وقتی D بر خط Cu سیر مینماید نقطه K بر خط $C'u'$ که از انتقال Cu برابر EC حاصل شده سیر خواهد نمود، از اینجا نتیجه میشود که اگر بخواهیم جسم تحت اثر قوهٔ که خط اثرش Cv است بحال تعادل باشد باید مقدار قوه مزبور را برابر CL اختیار نمائیم بنابر آنکه L محل تلاقی $C'u'$ و Cv باشد مسئله ممکن نیست مگر وقتی که Cv داخل زاویه $CC'u$ واقع باشد مقدار مینیموم متناظر با امتداد CX است که بموازات بزرگترین شیب صفحه رسم گردد ازمثلث قائم الزاویه CC'N میتوان این مقدار را که برابر $psini$ است حساب نمود، مقدار فشاری که بر صفحه P وارد میگردد از مثلث قائم الزاویه ECM برابر $pcosi$ بدست میاید.

ش ۸٤

اگر قوهٔ F بصورت CC' باشد عکس العمل صفحه مساوی صفر است

هرگاه نقطه تلاقی Cu و صفحه P خارج قطعه AB باشد قوهٔ F با وزن p جسم تشکیل منتجه میدهد که قائم بر صفحه بوده اما صفحه را خارج قاعده اتکاء قطع مینماید بقسمی که جسم از وضع خود خارج میگردد.

حل بعضی مسائل

۹۱ـ سه رشته‌در نقطه C بیکدیگر گره خورده‌اند یکی از آنها تحت اثر وزن P است دو رشته دیگر پس از عبور از قرقره A و B تحت اثر اوزان Q و R درمیایند مقصود وضع تعادل نقطه C است

نقطه C تحت اثر سه قوه P وکشش های AC وBC میباشد، وقتی تعادل برقرار است که قوای مزبور دریك صفحه V باشند، دو قسمت از رشته‌که ازقرقره A عبور مینماید درصفحه همین قرقره قرار دارد این‌صفحه‌بمناسبت آنکه شامل خط اثر قوه Q است قائم میباشد ولی از طرفی صفحه مزبور که بر AC مرور مینماید بر صفحه V منطبق خواهد شد، بهمین دلیل معلوم میشود قرقره B نیز در صفحه V واقع است.

تعادل قرقره A وقتی بر قرار است که کشش رشته AC برابر Q باشد و همچنین‌تعادل قرقره B در حالتی مقرر میگردد که کشش‌رشته BC برابر R شود.

قوای P و Q و R وارد به‌نقطه C باید بحال تعادل باشند پس کثیرالاضلاع این قوی مسدود خواهد بود.

میتوان مثلث opq را بامعلومات سه ضلع و امتداد ضلع op بنا نمودبقسمیکهop=P و oq=Q و qp=R، خط BC بموازات op و خط AC بموازات oq

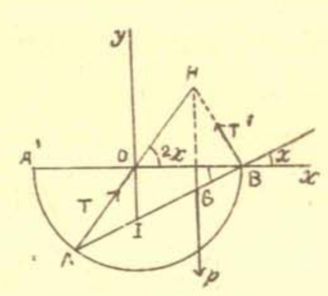
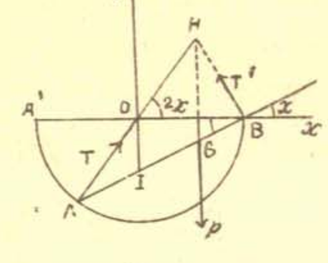
س ۸۵

میگردد بنا براین وضع نقطه C مشخص میشود برای آنکه مسئله ممکن باشد باید مثلث opq رسم گردد یعنی لازم است هر یك از قوای P و Q و R ازمجموع دو قوه دیگر کمتر باشد.

۹۲ـ میلهٔوزین‌ومتشابه الاجزائی بطول $2l$ را بدون‌اصطکاك بر کنارهٔ جامی بشکل نیمکره* که محور تقارنش قائم است تکیه داده اند یکی از دو منتهای میله برسطح داخلی جام متکی است وضع تعادل آنرا تعیین نمائید.

O را مرکز جام و R را شعاع آن و A را نقطه که منتهای میله برسطح داخلی جام متکی است فرض مینمائیم و B را نقطهٔ از میله اختیار میکنیم که بوسیلهٔ آن بر کنارهٔ جام متکی میباشد.

میله تحت اثرسه قوه است: p وزن میله که بمرکز ثقل آن یعنی نقطه G وسط AB وارد است، عکس لعمل T جام در نقطه A که بر امتداد شعاع AO میباشد عکس العمل T′ کنارهٔ جام که اگر AB را استوانه شکل فرض کنیم عمود بر AB خواهد بود.

س ۸٦

سه قوه‌مزبور باید در یك صفحهٔ واقع باشند و این صفحه لزوما صفحه قائم V است که شامل AB میباشد بعلاوه برنقطه O نیز میگذرد وضع تعادل میله متعلق بصفحه قائمی است که برشعاع OB میگذرد و ما آنرا صفحهٔ شکل اختیار کرده ایم.

زاویهٔ بین OB و وضع تعادل AB را x فرض مینمائیم محور Ox را بر OB که از O به B متوجه‌است‌اختیار میکنیم محور Oy را عمود بر Ox از نقطه O مرور میدهیم بقسمی که بطرف فوق متوجه باشد، چون‌مجموع جبری تصاویر قوی بر محورهای Ox و Oy و مجموع جبری عزمهای آنها نسبت بمحور Oz عمود بر صفحه xOz صفر است پس سه معادله‌نسبت به مقادیر نامعلوم T و T′ و x بدست‌میاید* تصاویر T و T′ بر Ox و Oy بترتیب

عبارتند از $T\cos 2x$ و $T\sin 2x$ و $-T'\sin x$ و $T'\cos x$ پس دو معادله اول چنین خواهد بود:

$$T\cos 2x - T'\sin x = 0 \qquad (۱)$$

$$-p + T\sin 2x + T'\cos 2x = 0 \qquad (۲)$$

برای محاسبه عزم وزن بایدطول نقطهٔ G را تعیین کرد ملاحظه میکنیم که طول مطلوب برابر تصویر OG یعنی منتجه دورهٔ OAG بر محور Ox میباشد، بقسمی که طول G برابر مجموع جبری تصاویر OA و AG بر Ox است، مقدار جبری تصویر AO مساوی $R\cos 2x$ و تصویر OA برابر $-2R\cos x$ است و همچنین مقدار جبری تصویر AG مساوی $l\cos x$ میباشد، عزم p نسبت بمحور Oz با Ox و Oy تشکیل کنج Oxyz را که بوضع مستقیم است میدهد و مقدار جبری آن عبارت است از:

$$-p(-R\cos 2x + l\cos x)$$

عزم T' دارای مقدار جبری $RT'\cos x$ میباشد پس معادله سوم چنین است

$$-p(l\cos x - R\cos 2x) + RT'\cos x = 0 \qquad (۳)$$

چون طرفین معادله (۱) را در $\sin 2x$ و طرفین معادله (۲) را در $-\cos 2x$ ضرب نموده آنهارا با یکدیگر جمع نمائیم حاصل میشود:

$$T'\cos x = p\cos 2x \qquad (٤)$$

چون معادله (٤) را با (۳) مقایسه کنیم نتیجه میشود

$$2R\cos 2x - l\cos x = 0 \qquad (٥)$$

برای آنکه یکی از جوابهای این معادله در فرض مسئله صدق نماید باید مقدار مزبور بین 0 و $\frac{T}{2}$ بوده و مقادیر T و T' که متناظر با اینجواب اند ثابت باشند، فرض میکنیم ریشه x بین 0 و $\frac{\pi}{2}$ واقع باشد $\cos x$ مثبت است بنا بر معادله (٥) $\cos 2x$ مثبت میباشد مقادیر T و T' که بوسیله معادلات (٤) و (۱) معین میشوند نیز مثبت خواهند بود میتوان AB را متناظر با x بنانمود، برای آنکه بتوان میله را موافق امتداد اینخط قرار داد بایدکه طول میله بیشتر از وتر AB باشد بعبارة اخری باید $2l > 2R\cos x$ و یا $\cos x < \frac{l}{R}$.

اگر این شرط بر قرار باشد بوسیله محاسبه معلوم میشود که AB یکی از اوضاع تعادل است.

چون $\cos 2x$ را به $2\cos^2 x - 1$ و $\cos x$ را به u بدل نمائیم معادله (٥) بدین صورت در میاید.

$$2R(2u^2 - 1) - lu = 0 \qquad (٦)$$

برای آنکه یکی از ریشه های u از اینمعادله متناظر با زاویه x باشد بقسمی که $\cos x = u$ جوابی را معین نماید لازم و کافی است. که u مثبت بوده وکمتر از ۱ و $\frac{l}{R}$ باشد.

معادلهٔ (٦) دارای یك ریشه مثبت و یك ریشه منفی است ریشهٔ مثبت آن وضع تعادل را وقتی معلوم میکند که کمتر از ۱ و $\frac{l}{R}$ باشد یعنی درصورتیکه

$$f(1) > 0 \quad \text{و} \quad f\left(\frac{l}{R}\right) > 0$$

$f(u)$ نمایش طرف اول معادله (٦) است که در آن ضریب u^2 مثبت میباشد از این نامساویها نتیجه میشود:

$$R\sqrt{\frac{2}{3}} < l < 2R$$

در حالت حدی که در آن $l = 2R$ وضع تعادل قطر A'B بوده و T برابر صفر است، درحالت حدی که درآن $l = R\sqrt{\frac{2}{3}}$، در حالت تعادل یکی از دو انتهای دومیله در B است و این وضع متناظر با $\cos x = \sqrt{\frac{2}{3}}$ میباشد

ملاحظه میکنیم که شرط $l < 2R$ لازم است زیرا اگر این شرط برقرار نباشد مرکز ثقل میله برای جمیع اوضاع مفروض خارج جام واقع میگردد.

تبصره ـ سه قوه T و T' و p باید متقارب باشند قائم نقطه G برنقطه H یعنی محل تلاقی T و T' میگذرد زاویه ABH قائمه میشود H بردائره بمرکز O وشعاع OA قرار دارد قائم نقطه O برنقطه I وسط AG خواهد گذشت برای بنای AB کافی است طولهای AB و AI تعیین شوند اما

$$BA - BI = \frac{l}{2}$$

و $BA \times BI = BO \times BA'$ و یا $BA \times BI = 2R^2$

پس مطلب راجع میشود برسم دوطول که تفاضل و مسطحشان در دست است .

۹۳ ـ ورقه مثلثی شکل ABC بوزن P که متشابه‌الاجزاء فرض شده در صفحه قائم قرار دارد بقسمی که ضلع AC از آن برافقیه منطبق است بعلاوه میدانیم $BC=a$ و $AC=b$ و $C=120^0$

اولا اضلاع a و b را چگونه بایداختیار کرد تاورقه‌بحال‌تعادل باشد

ثانیا اگرتعادل برقرارنیست بر راس B قوه F را ممتد از تحت‌بفوق در امتداد قائم وارد میسازیم تا تعادل برقرارشود حدودی‌راکه F بین آنها تغییر مینماید تعیین کنید .

اولاتعیین اضلاع a و b ـ ورقه برنقاط واقع بریك استقامت متکی است برای اینکه تعادل بر قرار کردد لازم و کافی است که قائم مار بر مرکز ثقل G قاعده مثلث را مابین نقاط M و C تلاقی کند ، و در نتیجه چون مبدا را M اختیار کنیم باید $MJ \leqq MC$ (۱) اما

$MJ = \frac{1}{3} MH = \frac{1}{3}\left(\frac{b}{2} + \frac{a}{2}\right)$ پس $\frac{1}{3}\left(\frac{b}{2} + \frac{a}{2}\right) \leqq \frac{b}{2}$ یعنی $a \leqq 2b$

و این شرط تعادل ورقه است .

ثانیا ـ حدود F ـ اگر $a > 2b$ براس B قوهٔ F را وارد میسازیم P و F دارای منتجه‌هستند بقسمی که $R = P - F$ واین‌منتجه‌ورقه‌را بر افقیهٔ $x'x$ میچسباند بعلاوه $P > F$

برای آنکه تعادل تحت اثر قوای جدید P و F بر قرار کردد باید قائم R خط AC را بین A و C تلاقی نمایدبقسمیکه اگر مبداء را M اختیار کنیم حاصل‌میگردد :

$$-\frac{b}{2} \leqq MK \leqq \frac{b}{2} \qquad (2)$$

برای‌محاسبه MK قضیه‌وارین ین را نسبت‌بنقطه M مراعات‌کنیم‌حاصل‌میشود

$R.MK = P.(MJ) - F(MH)$ و یا $MK = \frac{P - 3F}{P - F} \cdot \frac{a+b}{6}$ پس از شرط (۲) نتیجه میشود :

$$-3b(P-E) \leqq (a+b)(P-3F) \leqq 3b(P-F)$$

و یا

$$\frac{P}{3}\,\frac{a-2b}{a} \leqq F \leqq \frac{P}{3}\,\frac{4b+a}{2b+a}$$

حالت مخصوص ـ هرگاه $F = \frac{P}{3}\,\frac{a-2b}{a}$ نقطهٔ K بر نفطه C منطبق است وقتی $F = \frac{P}{3}$ نقاط K و M و O بر یکدیگر منطبق‌اند.

اگر $F = \frac{P}{3} \cdot \frac{4b+a}{2b+a}$ نقطه K بر نقطه A منطبق است .

۹۴ـ وقتی دسته اجسام‌تحت اثرقوای مفروض‌بحال تعادل‌اند لازم‌است که قوای خارجی وارد باجسام مزبور تشکیل دستگاهی معادل با صفر بدهند شرایط مزبور عموما کافی نیستند .

برای آنکه تعادل دسته اجسام مزبور بر قرار کردد باید متوالیا تعادل هر یك ازآنهارا تحقیق نمائیم یعنی میتوان عکس‌العملهای هر یك از اجسام را نسبت بدیگری تعیین نموده و هریك از آنهارا تحت اثر قوای وارده وعکس العملهای آزاد فرض نمائیم .

مثال - دو میلهٔ AB و AC بطولهای l و l' در نقطه A بارتفاع H فوق صفحه افقی که بر آن مواقع B و C از میله میتوانند لغزش بدون اصطکاك داشته باشند مفصل شده اند ، میله های مزبور دریك صفحه قائم قرار دارند ، رشته افقی غیر قابل کشش بطول مناسب در ارتفاع h میله هارا بهم وصل مینماید میله AB حامل وزن P است که درنقطه D وارد شده بقسمیکه $BD = mBA$ m عدد مفروض است ، مقصود تعیین کشش رشته وعکس العملهای مفصل است بفرض آنکه وزن میله ها ورشته را غیر قابل ملاحظه فرض کنیم .

میله AC تحت اثر سه قوه است . عکس العمل صفحه افقی بر نقطه C کشش T رشته وعکس العمل R مفصل میله . قوای مزبور بایددر یك صفحه باشند این صفحه همان صفحه قائمی است که شامل میله است این صفحه شامل رشته و میله AB نیز خواهد شد زیرا شامل نقاط A و E میگردد .

عکس العمل مفصل میله AB متقابل با R است جمیع قوائی که برمیله ها وارد میشوند در صفحهٔ قائم مار بر آنها قرار دارند .

مسئله پنج مجهول دارد :

مقادیر عکس العملهای زمین درنقاط B و C ، مقدار کشش رشته ، تصاویر عکس العمل R بر دو محور .

ملاحظه میکنیم که قوای خارجی وارد بر هریك از دو میله باید تشکیل دستگاه معادل با صفر بدهد باین ترتیب برای هر میله سه معادله حاصل میگردد که میتوان از آنها مقادیر مجهوله را حساب کرد ، افقیه Bx را محور طول و قائم By را محور

س ۸۸

عرض فرض میکنیم عزم حاملها را نسبت بمحور Bz عمود بر صفحه xBy تعیین مینمائیم X و Y را تصاویر R یعنی عکس العمل مفصل بر AC و X− و Y− تصاویر عکس العمل مفصل بر AB ، U و V را مقادیر جبری عکس العملهای نقاط B و C فرض مینمائیم . معادلات تعادل AB چنین خواهند بود .

$$(۱)\quad \begin{cases} T - X = 0 \\ U - P - Y = 0 \\ -Th - Pam - aY + HX = 0 \end{cases}$$

a برابر $\sqrt{l^2 - H^2}$ یعنی طول نقطه A است میدانیم عزم قوهٔ که تصاویرش بر محور X و Y باشند نسبت بمحور Bz بنا بر آنکه u و y مختصات نقطه اثر قوه باشد چنین است $xY - yX$ بنا براین شرط تعادل میله AC چنین خواهد بود .

$$(۲)\quad \begin{cases} -T + X = 0 \\ V + Y = 0 \\ Th + V(a + a') + aY - HX = 0 \end{cases}$$

بفرض آنکه $a' = \sqrt{l'^2 - H^2}$

بازاء یکدسته از جوابهای این معادلات که در آنها T و U و V و X و Y مجهول میباشندیك وضع تعادل نظیر است بشرط آنکه T و U و V مثبت باشند .

معادلات اول دو دستگاه با یکدیگر متحد اند پس دو دستگاه منجر به پنج معادله و پنج مجهول میگردد : بلافاصله معلوم میشود .

$$T = X \quad , \quad U = P + Y \quad , \quad V = -Y$$

و از جمع معادلات سوم دو دستگاه نتیجه میشود .

$$V = \frac{Pam}{a + a'} \quad ,$$

چون مقادیر Y و T را در سومین معادله دستگاه (۱) قرار دهیم حاصل میگردد

$$X = P\frac{aa'}{a + a'}\,\frac{m}{H - h} \quad ,$$

و از آن حاصل میشود :

$$Y = -\frac{aa'}{a+a'} \quad \text{و} \quad U = P\frac{a+a'-ma}{a+a'}$$

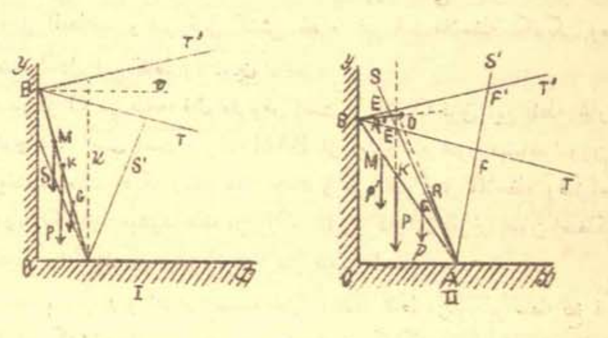
مسئله ممکن است . وقتی D بر AB بالا برود m ترقی مینماید کشش رشته و عکس‌العمل R وV زیاد شده و عکس‌العمل U کم میگردد .

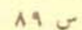
۹۵ - تعادل نردبان - نردبانی میتواند بدون اصطکاك بر زمین افقی متکی بر دیوار قائم بلغزد ، وزن نردبان وعمله که بر آن حرکت مینماید معین است ، ضریب اصطکاك نردبان بر زمین و دیوار مفروض است ، مقصود تعیین اوضاع تعادل نردبان است بفرض آنکه بمحور تقارن خود منجر شده باشد ، نردبان را بقسمی قرار میدهیم که محور تقارن مزبور در صفحه عمود بر اثر دیوار نسبت بزمین قرار گیرد .

صفحه قائمی را که بر محور تقارن نردبان میگذرد بمنزله صفحه شکل اختیار مینمائیم . G مرکز ثقل نردبان و M وضع عمله است و نردبان بر نقاط A وB متکی است p وزن نردبان ، p' وزن عمله ، a طول A ، ka و ka' طولهای G وM ، b عرض B ، f و f' ضرائب اصطکاك نردبان بر زمین و دیوار و φ و φ' زوایای متناظر آنها است .

خطوط AS و AS' ، BT و BT' را که با قائم برزمین ودیوار زوایای φ و φ' احداث مینماید رسم میکنیم . برای آنکه تعادل نردبان در وضع AB بر قرار گردد لازم است که بتوان دو عکس العمل مار برنقاط A وB یافت بقسمی که حاملهای نمایش آنها داخل زوایای SAS' و TBT' واقع بوده و با قوای p و p' تشکیل دستگاهی معادل صفر بدهند ، برای اینمنظور لازم است بر خط اثر این منتجه نقطه بیابیم که در آن واحد داخل زوایای SAS' و TBT' واقع باشد اما این شرط کافی نیز هست .زیرا اگر بر خط اثر P نقطه‌مانند D داخل زوایای مزبور یافت شود دوقوه‌مانند R و R' موجود است که مجموعشان AD و BD بوده و با P تشکیل دستگاهی معادل صفر

میدهند ، قوای مزبور عکس‌العملهای ممکن‌الحصول ارتباطی میباشند ، نردبان بحال تعادل خواهد بود .




س ۸۹

ساده ترین حالات وقتی است که زاویه OAB کمتر از φ باشد ، AB داخل زاویه SAS' خواهد بود ، نردبان برای جمع اوضاع عمله بحال تعادل است حال اگر زاویه OAB بیشتر از φ باشد خطوط AS و AS' ، BT و BT' اضلاع چهار ضلعی محدب EE'FF' میباشند ، اگر E رأسی باشد که طولش از طول سایر روس چهار ضلعی کمتر است برای تعادل نردبان لازم و کافی است که طول نقطه اثر P اقلا مساوی طول E باشد .

تمرینات

۹۶ - کرهٔ بشعاع یك سانتیمتر از ماده متشابه الاجزائی که هر متر مکعب آن بوزن ۲,۷ تن است بواسطه نقطهٔ O برشته بجرم غیرقابل ملاحظه آویخته شده است ، کره تحت اثر قوهٔ افقی F که قائم O را تلاقی مینماید بوضع تعادل‌است ، در وضع تعادل ، رشته با قائم O زاویهٔ 30^0 ایجاد مینماید ، مقدار F را بحسب دین تعیین کنید

۹۷ - رشته صلبی که بشکل دائره بمرکز O میباشد از حلقهٔ کوچك M عبورمینماید ، باین حلقه دو رشته بسته اند به یکی از رشته ها وزن Q وارد شده دیگری از مدخلی

که بر دایره در یکی از دو سر قطر افقی AA' تعبیه شده عبور مینماید بر این نقطه وزن P را وارد نموده اند ، مقدار زاویه AOM را که متناظر با وضع تعادل است تعیین نمائید ، با چه شرطی یکی از دو انتهای B و B' قطر قائم برای حلقه M دارای وضع تعادل است ، حلقه M میتواند بدون اصطکاك بر دایره بلغزد

۹۸ ـ دو نقطه وزین میتوانند بدون اصطکاك بر دایره قائمی بلغزند ٬ نقاط مزبور بواسطه رشته قابل انعطاف و غیر قابل کشش بجرم غیر قابل ملاحظه بیکدیگر وصل شده اند ، اوضاع تعادل این نقاط را تعیین نمائید

۹۹ ـ دایره بمرکز O در صفحه قائم مفروض است بر قائم O فوق این نقطه خارج دایره قرقره کوچك A نصب است ، رشته BAM از این رشته عبور مینماید ٬ وزن P بانتهای B آویخته شده بسر دیگر رشته حلقه باَبعاد و جرم غیر قابل ملاحظه وصل است بر این حلقه وزن Q وارد میشود حلقه مزبور بر دایره دارای لغزش بدون اصطکاك است اوضاع تعادل را تعیین کنید جرم رشته غیر قابل ملاحظه است

۱۰۰ ـ دو نقطه بوزن p و p' بر صفحه افقی واقعند نقاط مزبور بواسطه نخ قابل ارتجاعی که دارای کشش متناسب با امتداد رشته است بیکدیگر وصل شده اند f و f' ضرایب اصطکاك نسبت باین نقاط است تعادل دستگاه را معین کنید

۱۰۱ ـ ورقه مستوی متشابه الاجزاء بشکل متوازی الاضلاع را سه نفر که یکی از آنها بر یکی از روس قرار دارد حمل میکنند دو نفر دیگر چه نقطه از محیط ورقه را باید نگاه دارند تا هر سه یك فشار تحمیل نمایند

۱۰۲ ـ مثلث وزین متشابه الاجزاء ABC که اضلاع a و b و c از آن و همچنین زوایای مثلث A و B و C و وزن φ از آن معین است در نقطه M بوسیله رشته بدون جرم که براس A وصل است آویخته شده چه وزنی باید بر یکی از دو راس B و C وارد ساخت برای آنکه در وضع تعادل مثلث ضلع $\overline{BC}$ افقیه باشد

۱۰۳ ـ میله صلبی بوسیله منتهای علیایش که حول آن نتواند نوسان کند تثبیت شده طول آن ۵ متر وزنش ۱۰۰ کیلوگرم است منتهای اسفل آن بوسیله قوه بمقدار ۴۰ کیلوگرم و بر امتداد عمود بر میله رانده شده وضع تعادل میله را معلوم کنید

۱۰۴ ـ ورقه متشابه الاجزاء بسیار نازکی بشکل مثلث قائم الزاویه متساوی الساقینی بضلع a مفروض است این ورقه بدون اصطکاك بوسیله راس خود در سطح داخلی نیم کره مجوف بشعاع R که دایره عظیمه قاعده اش افقیه ایست متکی میباشد وضع تعادل ورقه - میل i آن را نسبت بقائم معین کنید - فرض میکنیم x طول قائم محصور بین مرکز کره وورقه باشد ـ درحالت مخصوصي که $a=R\sqrt{2}$ مسئله را حل کنید

۱۰۵ ـ میله متشابه الأجزاء وزيني بوسیله یکی از دو انتهایش بدون اصطکاك بر

دایره قائمی گذاشته شده است انتهای دیگر میله بر قطر قائم همین دایره است وضع تعادل میله را معین کنید

۱۰۶ ـ قرص مستدیر متشابه الاجزاء بوزن P و بمرکز C بوسیله نقطه O از محیطش آویخته شده است

اولا ـ این قرص وزین بحال تعادل است بیکی از دو سر قطر افقی آن یعنی نقطه A وزنی میاویزند معین کنید مقدار این وزن چقدر باید باشد برای آنکه خط OA در وضع جدید تعادل نسبت بقائم بمیل 35° باشد - در چه نقطه مانند J خط AC قائم O را تلاقي میکند مقدار $\frac{JA}{JC}$ را تا ۰٫۰۱ تقریب حساب کنید .

ثانیا ـ بفرض آنکه وزن آویخته شده نصف مقداری باشد که قبلاً حساب کرده ایم - مقدار زاویه OA را با قائم در وضع تعادل متناظر بحسب درجه ودقیقه حساب کنید

۱۰۷ ـ ظرف نیم کره شکلی بضخامت غیر قابل ملاحظه وشعاع R از طرف تحدبش بر صفحه افقی نهاده شده بدو سر قطر AB از آن دو وزن P و Q را وارد میکنیم وضع تعادل طرف را معین کنید

۱۰۸ ـ جامی بشکل نیم کره و وزن P و شعاع خارجی R و ضخامت C مفروض است این جام بوسیله جدار خارجی بر سطح افقی نهاده شده است بنقطه A واقع بر کنار خارجی جام وزن p را قرار داده‌اند مقصود محاسبه زاویه ایست که صفحه قاعده AB جام با قائم در وضع تعادل حاصل ایجاد میکند

مثال عددی ـ جام از جنس نقره است و وزن مخصوص ۱۰٫۵ و $R=0{,}1$ متر و $C=0{,}01$ و $p=0{,}5$ کیلوگرم

۱۰۹ ـ مرکز ثقل G از میلهٔ وزین غیر متشابه الاجزاء AB بمقطع خیلی کوچك میله را در نسبت $x=\frac{GA}{GB}$ تقسیم میکند وضع تعادل میله را معین کنید هنگامیکه دو انتهای آنرا بدون اصطکاك بر سطح داخلی کره تکیه دهیم ٬ 2α را زاویه فرض میکنیم که میله از مرکز بدان رویت شود :

اولا ـ بحسب x و α زاویه حاده β میله را با صفحه افقی در وضع تعادل تعیین کنید $(GA<GB)$.

ثانیا ـ مقدار β را تا یك درجه تقریب در حالت مخصوصیکه $x=\frac{1}{2}$ و $\alpha=30^{\circ}$ باشد حساب کنید

ثالثا ـ تغییرات β را بحسب x در حالت کلی که در آن x و α غیر مشخص ولی α ثابت میماند معین کنید

۱۱۰ ـ کره متشابه الاجزاء بشعاع R و وزن P بدون اصطکاك بر صفحه مایلی بمیل

a نسبت بصفحه افق متکی است کره مزبور بوسیله رشته غیر قابل ارتجاع بطول ۳R که متصل بنقطهٔ A از سطح کره است نگاه داشته شده‌است منتهای دیگر رشته بنقطه ثابت B بفاصله ۳R از صفحه بسته شده نقطه B و کره فوق صفحه هستند ' وضع تعادل کره ، کشش رشته وعکس‌العمل صفحه‌مطلوبست - آیا با مفروضات‌همیشه‌تعادل برقرار است ؟

۱۱۱ - هرم منتظمی مربع‌القاعده که قطر قاعده اش ۱۶ سانتیمتر و طول یالهای جانبی آن ۱۷ سانتیمتر است مفروض میباشد ، هرم مزبور' صلب' متشابه‌الاجزاء و وزین میباشد ، بوسیلهٔ نقطه M وسط یال SA آویخته شده تعادلش پایدار است مقصود محاسبه زاویه ایست که یال SA با قائم ایجاد میکند

براس S وزنی میاویزیم نسبت این وزن بوزن هرم چقدر باید باشد برای آنکه در حال تعادل یال SA افقیه گردد بالاخره بچه فاصله از قاعده باید هرم را بوسیله صفحه بموازات‌قاعده‌قطع کرد برای آنکه‌اگر این‌قسمت از حجم را حذف کنیم نقطه تعلیق M ثابت مانده و وزنیکه به S وارد کرده بوویم حذف شود ولی یال SA افقیه بماند

۱۱۲ - نیمدایره وزین متشابه الاجزائی در صفحه قائمی بوسیله نخ غیر قابل ارتجاع بجرم غیر قابل ملاحظه آویخته شده دو انتهای نخ بدو سر قطر نیمدایره بسته شده و بدون اصطکاك در حلقه ثابت C که ابعادش بینهایت کوچك است داخل گردیده - اوضاع مختلفه‌تعادل‌نیمدایره‌را معین کنید - حالتی‌راکه متناظر باتعادل‌پایدار است‌تحقیق کنید

۱۱۳ - مکعب وزینی متشابه الاجزاء بازادی حول یکی‌از روسش A که ثابت فرض شده دوران میکندبنقطهB راس مقابل A در یکی از وجوه مکعب قوهٔبرابر نصف وزن مکعب در امتداد افقیه مفروض وارد شده وضع تعادل مکعب را تعیین نمائید بخصوص زاویه AB را با افق تعیین نمایید

۱۱۴ - جسم صلب متحدالاجزاء وزینی بشکل دو مخروط دوار SBA و TAB است که در قاعده AB مشترك میباشند قطر AB مساوی ۲۳ است

اولا - ثابت کنید مرکز ثقل جسم بر مرکز چهار قوه مساوی و موازی منطبق است که بچهار راس ذواربعة الاضلاع SBTA یعنی مقطع سطح مخروطی بواسطه صفحه مار بر ST مرور مینماید

ثانیا - نسبت بین ارتفاعات را چگونه باید اختیار کرد برای آنکه جسم وقتی برصفحه افقی بوسیله سطح مخروط SAB یا TAB متکی است بحال تعادل باشد

۱۱۵ - استوانه افقی بشعاع R مفروض است برآن میله صلب وزین AB را که متشابه الاجزاء و طول آن $2l$ است قرار میدهند وزن میله برابر p واحد طول میباشد چنانچه وسط میله را متکی بر سطح ودرصفحه مقطع قائم استوانه افقا قرار دهیم پس بحال تعادل خواهد بود بریکی از دو انتهای میله مثلا A وزن q را میاویزیم میله‌بدون لغزش بر سطح استوانه گردش میکند و بوضع تعادل A′B′C′ در میاید ، مقصود تعیین

زاویه ایست که در اینوضع با افق تشکیل میدهد

۱۱٦ - مثلث متشابه الاجزاء وزینی بوسیله رشته OA بنقطه ثابت O آویخته شده نقطه تعلیق O′ را بقسمی تعیین کنید که اگر آنرا بوسیله رشته به C مربوط کنیم رشته های OA و OC′ در امتداد قائم بوده و ضلع BC در وضع تعادل مثلث افقیه باشد مقدار کشش دو رشته چقدر است

۱۱۷ - قطاع مستدیر متشابه‌الاجزاء وزین OAB در صفحه قائم V بنقطه O آویخته شده ، عقربه OI در امتداد منصف الزاویه AOB بر صفحه قطاع نصب است بر وسط قوس AB یعنی نقطه O′ خط O′L را بموازات OA رسم میکنیم این خط در صفحه قائم ثابت و قطاع متحرك است بنقطه B وزن P را وارد میسازیم قطاع منحرف میشود و عقربه OI خط O′L را در نقطه M تلاقی مینماید ، مقصود تعیین رابطه ایست که بین O′M و وزن P موجود است اگر O′L مدرج باشد قطاع برای توزین بکار میرود

۱۱۸ - مثلث ABC از راس A آویخته شده بر دو راس دیگر وزنهای P و Q وارد میگردد میل BC را نسبت بافق تعیین کنید

مثال عددی - مثلث متساوی الاضلاع است P برابر ۳۰ کیلوگرام و Q مساوي ۰,۲۵۵ کیلوگرام -

۱۱۹ - جسمی صلب و متشابه الاجزاء بشکل منشور مثلث القاعده مایل است بچه نقطه ازسطح‌منشوری‌را بایدبرشته‌آویخت تایالهاي جانبی‌منشور متوازی باعمود رشته‌باشد

۱۲۰ - میله متشابه الاجزائی بوزن P و بطول l حول انتهای O متحرك است انتهای دیگر میله A بمنتهای نخی وصل است که از قرقره B بابعاد غیر قابل ملاحظه میگذرد قرقره بر قائم O و فوق آن بفاصله h از آن قرار دارد جرم رشته غیر قابل ملاحظه است ' وزن Q بمنتهای دیگر نخ آویخته است

اولا - در حالت تعادل میله مقدار زاویه x را که میله با قائم احداث مینماید تعیین کنید (بحث)

ثانیا - مقدار و امتداد عکس‌العمل نقطهٔ O را تعیین نمایید بازاء چه مقدار از Q عکس‌العمل مزاور برابر وزن میله است

ثالثا - مقدار و امتداد فشاری که بوسیله قرقره برمحورش وارد میگردد چقدراست

مثال عددی - Q=٤ ، P=۸ ، l=٥ ، h=۷ در سلسله M,S,K,F

۱۲۱ - وزن P به نقطهA منتهای میله صلب بدون وزنی بطول r آویخته شده جانب دیگر را به نقطه ثابت O متصل نموده اند بقسمیکه میتواند حول آن دوران نماید بنقطه A رشته قابل انعطافی بجرم غیر قابل ملاحظه بسته شده ، رشته از داخل قرقرهٔ بابعاد بینهایت کوچك عبور مینماید قرقره در صفحه افقی مار بر O واقع بوده و از آن بفاصله r قرار دارد ، بمنتهای آزاد رشته‌وزن Q آویخته شده ، مقصود محاسبه زاویه ایست که

تیغه OA با افق در وضع تعادل خور ایجاد مینماید

۱۳۲ ـ میله وزین AB حول نقطه A متحرك است، آنرا بوسیله رشته قابل انعطافی که بمرکز ثقل آن بسته شده نگاهداشته اند، رشته مزبور از قرقره p (بابعاد کوچك) واقع بر قائم A عبور مینماید بر رشته وزن P آویخته شده. فاصله Ap مساوی AG است وزن میله Q و طول رشته l است وزن آن غیر قابل ملاحظه میباشد، مقصود تعیین اوضاع تعادل دستگاه و تشخیص اوضاع تعادل پایدار یا ناپایدار است

۱۳۳ ـ میله OA به نقطه ثابت O مفصل شده میله تحت اثر قوه P وارد بنقطه A است که از حیث کمیت و امتداد معین میباشد حلقه B میتواند در امتداد OA بدون اصطکاك لغزش نماید حلقه مزبور تحت اثر قوه مانند Q است که نیز از حیث کمیت و امتداد معین شده، اوضاع تعادل میله را تعیین نمائید

۱۳۴ ـ میله صلب CD بطول l و وزن ۲P بوسیله دو رشته CA و DB بطولهای a و b بنقاط A و B آویخته شده نقاط ثابت A و B در یك صفحهٔ افقی واقعند فاصله بین آنها برابر d است، چه وزنی باید بیکی از دو انتهای میله آویخت تا در وضع تعادل میله افقی باشد

۱۳۵ ـ میله AB که متشابه الاجزاء و وزین است بوسیله یکی از دو انتهایش بر دیوار قائمی بدون اصطکاك متکی است، رشته غیر قابل ارتجاع وبدون جرم که بطول l است بنقطه مفروض C واقع بر میله را به نقطه ثابت O مربوط مینماید، اوضاع تعادل میله را تعیین نمائید

۱۳۶ ـ میله متشابه الاجزاء AB بوزن p و طول l حول منتهای خود A متحرك است بسر دیگر آن رشته بدون جرمی وصل است رشته از قرقره کوچك C گذشته حامل وزن q است، فاصله نقطه C از صفحه افقی نقطه A برابر h واز قائم A مساوی k است، قوه q چقدر باید باشد تا میله در وضع مفروض بحال تعادل قرار گیرد

۱۳۷ ـ میله صلب غیر وزین OAB حول نقطه O متحرك است، میخواهیم با وجود وزن P که بنقطه A میاویزیم میله را بوضع افقی نگاهداریم بنا بر آنکه بر انتهای B قوه Q که امتدادش از نقطه C واقع بر قایم A و فوق آن میگذرد وارد شده باشد؛

اولا ـ OA و OB و AC مفروض اند مقدار قوه Q را حساب کنید

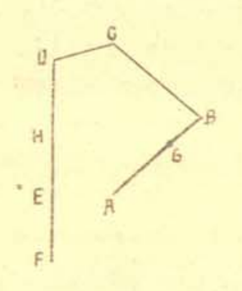
س ۹۰

ثانیا ـ طول OB چقدر باید باشد تا Q کوچکترین مقدار ممکنه را دارا شود بنا بر آنکه P و OA و AC معین باشند

۱۲۸ ـ دو سر رشته های OA و OB را به نقطه ثابت O بسته اند جرم آنها صفر طول آنها بترتیب ۱ و $\sqrt{3}$ است دو نقطه A و B را بنقاط A و B از میله متشابه الاجزاء وزینی وصل مینمائیم، وزن میله ۱۰ کیلوگرم و AB برابر ۲ است چه وزنی باید در نقطه A وارد ساخت تا در وضع تعادل میله افقی باشد

۱۲۹ ـ منتهای میله متشابه الاجزاء وزینی در نقطه B برشته بدون جرمی آویخته شده منتهای دیگر رشته بنقطه ثابت O بسته است، منتهای A از میله تحت اثر قوه افقی F قرار دارد، وضع تعادل دستگاه را تعیین نمائید، بازاء چه مقدار از F زاویهٔ OAB کوچکترین مقادیر ممکنه را دارا میگردد زوایای بین قائم و OB و AB چقدر است

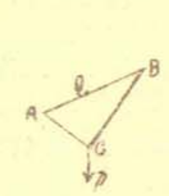
۱۳۰ ـ میله AB بوزن P حول منتهای خود A متحرك است و از طرفی B بوسیله رشته بدون جرم بطول l نگاهداشته شده، اینرشته از دو قرقره C و D با ابعاد کوچك عبور مینماید اولی بر قائم A واقع است رشته مزبور به نقطه H ختم میشود که بر آن در این نقطه زنجیر وزین قابل انعطافی بطول a وصل شده نقطه دیگر زنجیر بنقطه ثابت E که بر قائم D واقع است بسته شده، بفرض طول AG یعنی فاصله A از مرکز ثقل میله برابر h و وزن زنجیر HEF مساوی q واحد طول میباشد مقصود محاسبه طول CB در وضع تعادل زنجیر است آیا ممکن است مفروضات را طوری اختیار کرد که AB درجمیع اوضاع بحال تعادل باشد، کشش رشته را برابر وزن قطعه FH از زنجیر اختیار مینمائیم



س ۹۱

۱۳۱ ـ میله AB بدون وزن حول نقطه O متحرك است بدو سر آن رشته را که بوسیله قرقره C حامل وزن p است وصل مینمائیم مقصود تعیین وضع تعادل میله است

۱۳۲ ـ میله صلب AB میتواند حول پاشنه ثابتی در مرکز ثقل خود O که بر وسط آن واقع نیست دوران کند، a و b طولهای OA و OB میباشند، یکی از دو سر نخ قابل انعطاف و غیر قابل کششی را به نقطه A بسته اند رشته از حلقه کوچکی که در نقطه C ثابت شده عبور مینماید، همچنین مجددا از حلقه دیگری که در نقطه A نصب شده عبور میکند و بعد مجددا از حلقه اولی و سپس از حلقه دومی و قس علیهذا عبور مینماید بقسمی که از حلقه های A و C، $2n+1$ رشته بگذرد، آخرین رشته پس از عبور از حلقه C از حلقه ثابت دیگری که در نقطه B است عبور مینماید و پس از آن تحت اثر وزن P بحالت قائم میایستد، اصطکاك و وزن رشته و میله غیر قابل ملاحظه



س ۹۲

است بعلاوه نقطه C برقائم نقطه O وتحت این نقطه بفاصله c از آن قرار دارد

اولا ـ معلوم کنید که دستگاه مفروض بحال تعادل است

ثانیا ـ فرض میکنیم که در حال تعادل طولها $CA=x$ و $CB=y$ بقسمی باشند که $ka=x$ و $kb=y$ (k عدد مفروضی است) مقادیر a و b را بقسمی تعیین کنید که شرط فوق برقرار شود ، c و k و n اعداد مفروض اند

ثالثا ـ ثابت کنید که اگر عدد $۲n+1$ ثابت بماند مقدار k اختیاری نیست حدودی را که k بین آنها تغییر مینماید معین نمائید

۱۳۳ ـ میله وزین و متشابه الاجزاء OA بطول a حول نقطه ثابت O متحرك است برنقطه A منتهای میله دیگر AB معادل با A مفصل شده منتهای B میله اخیر بوسیله رشته بدون جرم و بطول a بنقطه O وصل است دستگاه بحال تعادل است

اولا ـ ظل زوایائی که اضلاع مثلث OAB با قائم ایجاد مینماید تعیین کنید

ثانیا ـ کشش رشته را بنا بر آنکه هر یك از میله‌ها بوزن ۱۰ کیلوگرم باشد معین سازید

۱۳۴ ـ دو تیغه متساوی AB و AC را درصفحه قائم قرار داده ایم بقسمی که BC متکی بر صفحه افق است تیغه AB در نقطه B با زمین مفصل است و دو تیغه در نقطه A بیکدیگر وصل میباشند ، شاخه AC میتواند بر زمین بلغزد ، بر نقطه D وسط AB در صفحه قائم ABC قوه p را عمود بر AB وارد مینمائیم بطریقیکه دستگاه بر صفحه افق متکی شود ، وزن تیغه ها و اصطکاك نقاط A و B غیر قابل ملاحظه است اما تیغه AC با زمین دارای اصطکاك است

اولا ـ بین چه حدودی باید زاویه α واقع باشد تا تعادل دستگاه ممکن گردد

س ۹۳

ثانیا ـ برای یکی از حالات تعادل مقدار فشار بر زمین و مفصل های A و B را حساب کنید مقدار ماکزیموم یا مینیموم هر یك از فشارها را بازاء تغییرات α تعیین نمائید

۱۳۵ ـ نردبان مضاعف AOA' با شاخه‌های مساوی AO و OA' بر زمین افقی AA' قرار دارد دو شاخه مزبور بواسطهٔ میله BB' بیکدیگر وصل شده اند تا مانع از لغزش نردبان بر خاك باشد وزن مجموع نردبان p و هر شاخه آن بوزن π است که از قاعده بر ثلث هریك از شاخه‌ها وارد شده وزن BB' برابر π' است بطریقی که $p=\pi'+۲\pi$ ، بر شاخه OA در نقطه M وزن P وارد شده طول OA برابر a و طولهای OB و OB' مساوی b است ، α نصف زاویه راس دو شاخه نردبان میباشد f ضریب اصطکاك نردبان بر زمین است (اصطکاك مفصل O صفر است)

اولا ـ چه شرطی باید مقرر باشد تا BB' دارای هیچ کششی نشود

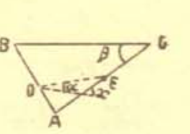
ثانیا ـ وقتی کشش موجود است مقدار آن و مقدار فشاری که بر O وارد میاید حساب کنید

۱۳۶ ـ اوضاع تعادل میله وزینی را تعیین کنید که یك انتهای آن ثابت بوده و برکنارهٔ فوقانی دیواری قائم که افقی فرض شده متکی است بدوا فرض مینمائیم که میله بدون اصطکاك بر دیوار بلغزد بعد اصطکاك را منظور میداریم ، اصطکاك منتهای ثابت میله غیر قابل ملاحظه است

۱۳۷ ـ مثلث متساوی الاضلاع وزین ABC بضلع a در صفحه قائمی قرار دارد ، بر نقطه M وسط AB رشته OM بطول l بسته شده منتهای دیگر ریسمان بنقطهٔ ثابت O که بر دیواری قائم قرار دارد نصب است کشش رشته بصورت قوه مفروضی که درجهت MO ممتد است میباشد راس A بدون اصطکاك بر دیوار میلغزد اوضاع تعادل مثلث را تعیین نمائید

س ۹٤

۱۳۸ ـ ورقه متشابه الاجزائی بشکل مثلث قائم الزاویه بدون اصطکاك بوسیله اضلاع AB و AC از زاویه قائمه بر دو میخ افقی D و E قرار دارد اگر میخ هارا استوانهٔ شکل فرض نمائیم ثابت کنید برای موجود شدن یك وضع تعادل از مثلث لازم است میخها موازی باشند



فرض آنکه فاصله DE میخها برابر ثلث وتر باشد مقصود محاسبه میل ضلع AC نسبت بافق است در وضع تعادل مثلث بنا برآنکه میل DE نسبت بافق و طول وتر ومقدار زوایای مثلث معین باشند

س ۹۵

۱۳۹ ـ تیغه مثلث شکل CBA که در زاویه A قائمه است بواسطه اضلاع زاویه قائمه بر دو قرص ثابت به‌ضخامت تیغه متکی است ، تیغه و قرصها در یك صفحه قائم قرار دارند مراکز O و O' بر یك افقیه واقع میباشند ، اگر فرض کنیم در وضع تعادل قائم مرکز ثقل سطح ABC بر راس A مرور نماید و بعلاوه این راس بر خط المرکزین دوائر واقع میباشد مقصود این است که بحسب اضلاع $AC=l$ و $AB=c$ ؛ اولا نسبت اشعه دوائر را تعیین نمائید ثانیا ـ نسبت بین قطعات AO و AO' را معلوم کنید ثالثا ـ نسبت فشارهائی که بر دو قرص وارد میاید معین سازید رابعا ـ b برابر ٦ دسیمتر و c مساوی ۸ دسیمتر و r برابر ۲۷ سانتیمتر و ضخامت تیغه مساوی ٥ سانتیمتر میباشد ووزن مخصوص آن ۷ است طولهای OA و OA' و r' و فاصله MN نقاط تماس و وزن تیغه و بالاخره فشار بر قرصهارا حساب کنید

س ٩٦

۱۴۰ - مثلث متساوي الاضلاع ABC بضلع a و وزن P میتواند بآزادی حول راس ثابت A دوران نماید رشته بجرم غیر قابل ملاحظه براس A ثابت بوده و از قرقره D که ابعادش غیر قابل ملاحظه است عبور مینماید نخ بواسطه وزن Q کشیده میشود ، D در صفحه افقی A و بفاصله $۲l$ از این نقطه قرار دارد تعادل بر قرار بوده و AB=BD مقصود محاسبه وزن Q و عکس‌العمل نقطه ثابت A برمثلث است ، مثال عددي $P=۲kg$ و ۰٫۳۳متر=a ۰٫۲۸متر=b

س ۹۷

۱۴۱ - مثلث متشابه الاجزاء و متساوی الاضلاع OAB بوزن p در صفحه قائمی حول نقطه O متحرك است میدانیم قوهٔ مانند q از فوق بتحت بر نقطه A وارد میشود

اولا - مقصود تعیین قوه F وارد براس B است بقسمی که تعادل برقرار گشته و ضمنا زاویه $\widehat{OA}$ با محور افقی Ox برابر مقدار معین α شود

ثانیا - بنابر آنکه q ثابت بماند تغییرات F را وقتی α بین 0 و ۲π تغییر مینماید تعیین کنید

س ۹۸

۱۴۲ - مکعب متشابه‌الاجزاء بوزن P ویال $۲a$ بدون اصطکاك بواسطه یکي از يالهای افقیش AB بر دیوار قائمی متکی است این مکعب بواسطه رشته بطول l که بمرکز O یکی از وجوه مار بر AB و بدیوار قائم بسته است نگاهداشته شده مقصود تعیین وضع تعادل مکعب است ، کشش رشته وعکس العمل دیوار را حساب کنید

۱۴۳ - بر دائره قائمی بشعاع R که حول مرکزش میتواند دوران نماید رشته پیچیده شده که بدان وزن P را آویخته اند برنقطه A از سطح دایره که بفاصله r از مرکز O است رشته ثابتی بسته شده که از حلقه C عبور مینماید ، حلقه C بر قائم O و ازاین نقطه بفاصله a قرار دارد ، CM را با قوه F میکشیم مقصود محاسبه زاویه x است که بین شعاع OA وقائم OC درحال تعادل تشکیل میشود (بحث)

س ۹۹

۱۴۴ - نیمدائره متشابه الاجزاء و وزینی محدود بقطر AB حول A متحرك است بر نقطه B رشته که بر نقطه ثابت C بسته است متصل میباشد ، $AB=۲R$ و $AC=\frac{۵R}{۲}$ و $BC=\frac{۳R}{۲}$ و وزن P نیمدائره مفروص اند ، مقصود تعیین عکس‌العمل نقطه A و کشش رشته است .

اغلاط ذیل را تصحیح نمائید .

صفحه	سطر	غلط	صحیح
۸	۱	نتیجه	منتجه
۲۱	۲۳	منتجه	نتیجه
۳۳	۱	میکند	کند
۳۳	۱۴	oL و oL′	OL و OL′
۴۳	۴	$m-mg$	$-mg$
۴۴	۷	gt	$-gt$
۴۵	۴	Z	z
۴۶	۱	$cos a$	$cos^2 a$
۴۶	۴	$y,$	$z,$
۴۷	۱۳	$g_1^2 x$	$g x_1^2$
۴۷	۱۴	$t_1 g a$	$x_1 tg a$
۴۸	۳	h	g
۴۸	۱۱	حرکت مادی متکی	حرکت نقطه‌مادی که متکی
۴۹	۱۸	sino	sin
۵۰	۲۰	$a \ \varphi$	$a-\varphi$
۵۱	۲۳	HM_1	OM_1
۵۹	۲۲	$Y_1^2 Z_1^2$	$Y_1^2+Z_1^2$
۸۰	۱۲	p_1	p_2
۱۳۶	۲۹	س ۹۰	س ۹۰

فهرست مندرجات

خاتمه

کتبی که از تألیفات مؤلف این کتاب از طبع خارج شده

هندسه رقومی مخصوص کلاس پنجم متوسطه

مکانیک مخصوص کلاس پنجم متوسطه

« « « ششم متوسطه

هندسه ترسیمی مخصوص کلاس ششم

کتبی که تحت طبع است

حساب استدلالی مخصوص کلاس ششم

حل المسائل هندسه رقومی و هندسه ترسیمی مخصوص کلاسهای ٥ و ٦ متوسطه

هندسه و مخروطات مخصوص کلاس ششم متوسطه

